

7. melléklet

7.5. Kerettanterv a köznevelési típusú sportiskola neveléséhez-oktatásához

Tartalom:

- | | |
|---|-----------|
| — kerettanterv a négyévfolyamos képzéshez | 2. oldal |
| — kerettanterv a hatévfolyamos képzéshez | 37. oldal |

MATEMATIKA

9–12. évfolyam, speciális tagozat

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról mint tudásrendszerről és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését.

A matematikatanítás feladata a matematika különböző arculatainak bemutatása. A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömeinek forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítője; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze.

A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reproduktív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A műveltségi terület a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a

képességgel és készséggel, hogy alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segítheti a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódást. Mindehhez elengedhetetlen egyszerű matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

A tanulók rendszeresen oldjanak meg önállóan feladatokat, aktívan vegyenek részt a tanítási, tanulási folyamatban. A feladatmegoldáson keresztül a tanulók képessé válhatnak a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul bennük az önellenőrzés igénye, a sajátjukétól eltérő szemlélet tisztelete. Mindezek érdekében is a tanítás folyamában törekedni kell a tanulók pozitív motiváltságának biztosítására, önállóságuk fejlesztésére. A matematikatanítás, -tanulás folyamatában egyre nagyobb szerepet kaphat az önálló ismeretszerzés képesség fejlesztése az ajánlott, illetve az önállóan megkeresett, nyomtatott és internetes szakirodalom által. A matematika a lehetőségekhez igazodva támogatni tudja az elektronikus eszközök (zsebszámológép, számítógép, grafikus kalkulátor), internet, oktatóprogramok stb. célszerű felhasználását, ezzel hozzájárul a digitális kompetencia fejlődéséhez.

A tananyag egyes részleteinek csoportmunkában történő feldolgozása, a feladatmegoldások megbeszélése az együttműködési képesség, a kommunikációs képesség fejlesztésének, a reális önértékelés kialakulásának fontos területei. Ugyancsak nagy gondot kell fordítani a kommunikáció fejlesztésére (szövegértésre, mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatására, megértésére, saját gondolatok közlésére), az érveken alapuló vitakészség fejlesztésére. A matematikai szöveg értő olvasása, tankönyvek, lexikonok használata, szövegekből a lényeg kiemelése, a helyes jegyzeteléshez szoktatás a felsőfokú tanulást is segíti.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jártas a problémamegoldásban. A matematikatanítás alapvető feladata a pénzügyi-gazdasági kompetenciák kialakítása. Életkortól függő szinten rendszeresen foglalkozunk olyan feladatokkal, amelyekben valamilyen probléma legjobb megoldását keressük. Szánjunk kiemelt szerepet azoknak az optimumproblémáknak, amelyek gazdasági kérdésekkel foglalkoznak, amikor költség, kiadás minimumát; elérhető eredmény, bevétel maximumát keressük. Fokozatosan vezessük be matematika feladatainkban a pénzügyi fogalmakat: bevétel, kiadás, haszon, kölcsön, kamat, értékcsökkenés, -növekedés, törlesztés, futamidő stb. Ezek a feladatok erősítik a tanulóknál azt a tudatot, hogy matematikából valóban hasznos ismereteket tanulnak, illetve, hogy a matematika alkalmazása a mindennapi élet szerves része. Az életkor előrehaladtával egyre több példát mutassunk arra, milyen területeken tud segíteni a matematika. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy milyen matematikai ismereteket alkalmaznak az alapvetően matematikaigényes, illetve a matematikát csak kisebb részben használó szakmák (pl. informatikus, mérnök, közgazdász, pénzügyi szakember, biztosítási szakember, valamint pl. vegyész, grafikus, szociológus), ezzel is segítve a tanulók pályaválasztását.

A matematikához való pozitív hozzáállást nagyban segíthetik a matematikai tartalmú játékok és a matematikához kapcsolódó érdekes problémák és feladványok.

A matematika a kultúrtörténetnek is része. Segítheti a matematikához való pozitív hozzáállást, ha bemutatjuk a tananyag egyes elemeinek a művészetekben való alkalmazását. A motivációs bázis kialakításában komoly segítség lehet a matematikatörténet egy-egy mozzanatának megismertetése, a máig meg nem oldott, egyszerűnek tűnő matematikai sejtések megfogalmazása, nagy matematikusok életének, munkásságának megismerése.

Minden életkori szakaszban fontos a differenciálás. Ez nemcsak az egyéni igények figyelembevételét jelenti. Sokszor az alkalmazhatóság vezérli a tananyag és a tárgyalásmód

megválasztását, más esetekben a tudományos igényesség szintje szerinti differenciálás szükséges. Egy adott osztály matematikatanítása során a célok, feladatok teljesíthetősége igényli, hogy a tananyag megválasztásában a tanulói érdeklődés és a pályaorientáció is szerepet kapjon. A matematikát alkalmazó pályák felé vonzódó tanulók gondolkodtató, kreativitást igénylő versenyfeladatokkal motiválhatók, a humán területen továbbtanulni szándékozók számára érdekesebb a matematika kultúrtörténeti szerepének kidomborítása, másoknak a középiskolai matematika gyakorlati alkalmazhatósága fontos. A fokozott szaktanári figyelem, az iskolai könyvtár és az elektronikus eszközök használatának lehetősége segíthetik az esélyegyenlőség megvalósulását.

Ez a kerettanterv a négy évfolyamos speciális matematikatanítás számára készült. Ennek nagy szerepe van a tudósutánpótlás biztosításában, de nagy a hatása gazdasági élet szakember-utánpótlására is.

Elsődleges célunk, hogy megőrizzük a matematika tagozatos osztályok haladó hagyományait, ugyanakkor azt is várjuk, hogy az e tanterv alapján tanuló diákok a felsőoktatásban jól hasznosítható ismeretekkel hagyják el a középiskolát. A rendelkezésre álló nagyobb órakeretet hatékonyabb, de időigényes módszerek (pl. önálló felfedeztetés, differenciált feladatok) alkalmazására is fel kívánjuk használni, hasonlóképpen gondot fordítunk a felmerülő problémák részletesebb elemzésére. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a fenti célú mérsékelt tananyag-növekedés az elért szemléletfejlődéssel és a megnövekedett gyakorlási idővel jelentős teljesítményjavulást eredményez.

Emelt szintű matematika kerettanterv szerint már ötödik (esetleg hetedik) osztálytól tanulhatnak az általános iskolások. Azonban e kerettanterv készítésekor nem tételeztük fel az általános iskolás emelt szintű tananyag ismeretét, célszerűnek látjuk az egyes témák tárgyalásának kezdetén az emelt szintű általános iskolai legfontosabb kiegészítő ismeretek áttekintését.

9–10. évfolyam

A matematika kerettantervnek ez a fejezete a négyosztályos gimnáziumok azon tanulóinak szól, akik matematikából speciális tantervű képzést választottak. Ezért a tananyag összeállításánál feltételezhetjük, hogy kiemelkedő matematikai képességű, érdeklődőbb tanulóknak szól. A normál osztályokéhoz képest kiegészítő elemek kerülnek a tananyagba. Ezek egy része motivációs erejű, vannak olyanok, amelyek az emelt szintű érettségi vizsgára való felkészülést segíthetik, vannak olyanok is, amelyek a felsőoktatásban lesznek majd hasznosíthatók. Olyan tananyagelemeket is szerepeltetünk ezeken az évfolyamokon, amelyek biztosabbá teszik a tanulók ismereteit, kitekintést nyújtanak egy-egy témakör szélesebb körű alkalmazásaira, segíthetik a versenyeken való eredményesebb szereplésüket. Nem feltétlenül törekszünk a tananyag erőszakos növelésére, a korosztálynak megfelelő, mélyebb tárgyalást tartjuk elsődlegesnek.

A középiskola első két évfolyamán sok, korábban már szereplő ismeret, összefüggés, fogalom újra előkerül úgy, hogy a fogalmak definiálásán, a tételek igazolásán, rendszerezésén, kapcsolataik feltárásán és alkalmazási lehetőségeik megismerésén lesz a hangsúly. A kerettantervben szereplő tételek nagy többségét is bizonyítani kell. Ezért a tanulóknak meg kell ismerkedniük a tudományos feldolgozás alapvető módszereivel. (Mindenki által elfogadott alapelvek/axiómák, már bizonyított állítások, új sejtések, állítások megfogalmazása és azok igazolása, a fentiek összegzése, a nyitva maradt kérdések felsorolása, a következmények elemzése.)

A fenti célok az általános iskolai matematikatanítás céljaihoz képest jelentős többletet jelentenek. Fontos, hogy változatos módszertani megoldásokkal tegyük könnyebbé az

átmenetet. Hasznosak lehetnek ebből a szempontból a matematikai alapú játékok is. A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat és szimmetriákon alapuló geometriai, rajzos játékokat. Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehetőségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amelyeket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni. A geometria egyes területeinek (szimmetriák, aranymetszés) a művészetekben való alkalmazásait bemutatva világossá tehetjük a tanulók előtt, hogy a matematika a kultúra elválaszthatatlan része. A témakör egyes elemeihez kapcsolódva mutassuk be néhány matematikus életútját! Az ezekre a témákra fordított idő bőven megtérül az ennek következtében növekvő érdeklődés, javuló motiváció miatt.

Változatos példákkal, feladatokkal mutathatunk rá arra, hogy milyen előnyöket jelenthet a mindennapi életben, ha valaki jól tud problémákat megoldani. Gazdasági, sport témájú feladatokkal, számos geometriai és algebrai szélsőérték-feladattal lehet gyakorlati kérdésekre optimális megoldásokat keresni.

A középiskolás kor már alkalmassá teszi a tanulókat az önálló ismeretszerzésre. Legyen követelmény, hogy egyes adatoknak, fogalmaknak, ismereteknek könyvtárban, interneten nézzenek utána. Ez a kutatómunka hozzájárulhat a tanulók digitális kompetenciájának fejlesztéséhez, ugyanezt szolgálhatja a geometriai és egyéb matematikai programok használata is.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok	Órakeret 62 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Számhalmazok, ponthalmazok. Matematikai állítások elemzése, igaz és hamis állítások.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának ismerete, alkalmazása problémamegoldásra, matematikai modellek alkotására. Több szempont alkalmazása – megosztott figyelem fejlesztése. Feladatmegoldási rutin mélyítése. Definíciók, jelölések használata – az emlékezet fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Halmazok. Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halmazok egyenlősége. Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz. Descartes-féle szorzat. A fogalmak ismételése, alkalmazása több halmazra. Pontos definíciók, jelölések használata. „Reláció” és műveleti tulajdonságok bizonyítása. Halmazok felbontása diszjunkt halmazok uniójára. A halmazműveletek tulajdonságai. Halmazok számossága. Számosság és halmazműveletek. Logikai szita formula. n elemű halmaz részhalmazainak a száma. Véges és végtelen halmazok. (Csak „szemléletes” szinten,		<i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen; adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése. <i>Biológia-egészségtan:</i> rendszertan.

később részletese tárgyaljuk.) Matematikatörténet: Georg Cantor.		
Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások. Adott tulajdonságú objektumok konstruálása. Adott tulajdonságú halmazok konstruálása. Ábrák színezése, lefedése adott feltételek szerint. Annak indoklása, hogy valamely konstrukció nem hozható létre. (Invariáns mennyiség keresése.)		
Logika. Logikai műveletek (negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia) és tulajdonságaik Összevetés a halmazműveletek tulajdonságaival. Rendszerező ismétlés feladatokon keresztül. A köznap szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése. Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata. Következtetések. Normálformák. A logikai áramkörök elméletének elemei. Matematikatörténet: Pólya György, George Boole.		
Kombinatorika. Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel. Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel $\text{Jelek használata: } n! , \binom{n}{k}.$ Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik. Pascal-háromszög és tulajdonságai. Binomiális tétel. Matematikatörténet: Blaise Pascal, Erdős Pál. Néhány kombinatorikus geometriai feladat. n pont maximum hány egyenest határoz meg? n egyenesnek maximum hány metszéspontja lehet? n egyenes maximum hány részre osztja a síkot? Gráfok. Néhány probléma ábrázolása gráfokkal. Gráfelméleti alapfogalmak. Vonalak, körök, utak (séta, vonal, út, kör). Euler-vonal. Euler-körvonal. Hamilton-kör. Hamilton-út.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, komplementer halmaz. Permutáció, variáció, kombináció, logikai művelet, gráf.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Valós számok	Órakeret 32 óra
Előzetes tudás	Természetes számok, egész számok, racionális számok halmaza. Műveletek elvégzése a racionális számok halmazán fejben, írásban, számológéppel. Műveletek sorrendje, zárójelek használata. Hatványozás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számkörbővítés elveinek megértése, a valós számok halmazának ismerete. Gondolkodás: ismeretek rendszerezésének fejlesztése. Indirekt bizonyítási módszer alkalmazása. Absztrakciós készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Számhalmazok: – természetes számok, – egész számok, – racionális számok, – irracionális számok, – valós számok. Mely műveletek nem vezetnek ki az egyes számhalmazokból? A racionális számok halmazán végzett műveletek biztonságos elvégzése – ismétlés, gyakorlás. Műveleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Számok tizedes tört alakja. Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek. Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal. Hatványozás és azonosságai egész kitevőre. Számok normálalakja. Számolás normálalakban felírt számokkal. Normálalak a számológépen. A valós számok és a számegyenes kapcsolata. A racionális számok halmaza nem elegendő a számegyenes pontjainak jelölésére.		<i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> a tér, az idő, az anyagmennyiség nagy és kis méreteinek megadása normálalakkal.
Négyzetgyök fogalma. A négyzetgyökvonás azonosságai. Kivitel a gyökjel alól, bevitel a gyökjel alá. Nevező gyöktelenítése. $\sqrt{n}$ irracionális, ha n nem négyzetszám. Indirekt bizonyítás.		
Az n-edik gyök fogalma. A gyökvonás azonosságai. Páros és páratlan gyökkitevő. Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól. A szerkeszthetőség néhány kérdése. Permanenciaelv. A racionális kitevőjű hatványok.		<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> zajszennyezés. <i>Kémia:</i> pH-számítás.

Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel. A hatványfogalom kiterjesztése irracionális kitevőre. Hatványozás kiterjesztése valós kitevőre. A logaritmus fogalma. Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel. A logaritmus azonosságai. Szorzat, hányados, hatvány logaritmusa, áttérés más alapú logaritmusra. Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál. A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására. Logaritmustáblázat. Matematikatörténet: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Valós szám, normálalak, négyzetgyök, n -edik gyök, logaritmus.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Algebrai kifejezések használata	Órakeret 31 óra
Előzetes tudás	Összefüggések leírása algebrai kifejezésekkel, $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, helyettesítési érték, zárójelfelbontás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai kifejezések biztonságos használata, célszerű átalakítási módok megtalálása, elvégzése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Algebrai kifejezések. Polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.		<i>Fizika; kémia:</i> menyiségek kiszámítása képlet alapján, képletek átrendezése.
Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$, $(a + b + c)^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$. $a^n - b^n$, $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.		
Azonos átalakítások. Polinomok összeadása, kivonása. Polinomok szorzása, hatványozása. Szorzattá alakítás különböző módszerei. Polinomok maradékos osztása. Algebrai törtekkel végzett műveletek. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása,		

szorzása, osztása. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. Matematikatörténet: algebra – Al-Hvarizmi.	
Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, hatványközép, és a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két és több tagra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Kapcsolat: másodfokú függvények vizsgálata.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Algebrai kifejezés, polinom, algebrai tört, azonosság, közép.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Oszthatóság	Órakeret 42 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A korábbi években szerzett ismeretek elmélyítése, bővítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok. Az oszthatósági szabályok. Analógiák nem tízes alapú számrendszerek oszthatósági szabályaiban. NIM-játék. Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban. Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.		
Prímszám, összetett szám, prímtényezős felbontás. A számelmélet alaptétele. Osztójáték. Végtelen sok prímszám van. Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről. Legkisebb közös többszörös, legnagyobb közös osztó. Euklideszi algoritmus. Osztók számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényezős felbontásból. Euler-féle φ függvény. Kis Fermat-tétel. Wilson-tétel. Néhány speciális prím (Mersenne-prímek, Fermat-prímek). Tökéletes számok.		<i>Informatika:</i> nagy prímek szerepe a titkosításban.
Kongruenciák és tulajdonságai. Maradékosztályok. Diofantoszi egyenletek.		

Lineáris diofantoszi egyenlet. Az $ax + by + cxy = d$ típusú diofantoszi egyenlet. Szöveges feladatok megoldása diofantoszi egyenlettel. Pitagoraszi számhármakok. Matematikatörténet: Diophantos, Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Osztó, többszörös, prím, prímtényező felbontás, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, számelméleti függvény, kongruencia, maradékosztály.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet, algebra Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer	Órakeret 90 óra
Előzetes tudás	Egyismeretlenes, elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Alaphalmaz vizsgálata, ellenőrzés. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; az ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a problémának megfelelően. Számológép használata. Az önellenőrzés képességének fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Egyenletek megoldása grafikus módszerrel, alaphalmaz és értékkészlet vizsgálatával, algebrai módszerekkel. Egyenletek ekvivalenciája. Elsőfokú egyenletek.		<i>Fizika; kémia:</i> képletek értelmezése, egyenletek rendezése.
Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. A korábban tanult módszerek elmélyítése. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika. <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.
Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?		
Elsőfokú paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek.		
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.		<i>Fizika:</i> a mérés hibája.
Elsőfokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesítő módszer.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.

Egyenlő együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Gauss-elimináció. Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.	
Elsőfokú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyszerű egyenlőtlenségrendszer.	
Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással. A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségi szintű alkalmazása. Számológép használata. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diskusszió. Önellőrzés. Gyöktényezős alak, Viète-formulák. Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viète-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával. Szélsőérték-feladatok Másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás. Optimális megoldásokra törekvés.	<i>Fizika:</i> fizikai tartalmú minimum- és maximumproblémák. <i>Filozófia:</i> egy adott rendszeren belül megoldhatatlan problémák létezése.
Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.	<i>Fizika:</i> egyenletesen gyorsuló mozgás leírása. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Másodfokú egyenlőtlenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.	
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.	<i>Fizika:</i> ütközések.

Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamis gyök, gyökvesztés. Önellenőrzés képességének fejlesztése.		
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetszétválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése. Paraméteres másodfokú egyenlőtlenségek.		
Magasabb fokú egyenletek. Egész együtthatós polinom egész és racionális gyökei. Bezout tétele. Gyökök és együtthatók közti összefüggés. Horner-elrendezés. Matematikátörténet: magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.		
Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek. Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása.		<i>Földrajz:</i> globális problémák (pl. demográfiai mutatók, a Föld eltartó képessége és az élelmezési válság, betegségek, világjárványok, túltermelés és túlfogyasztás).
Logaritmikus egyenletek egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával. Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmikus egyenleteknél.		<i>Kémia:</i> pH-számítás
Paraméteres exponenciális és logaritmikus egyenletek.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Elsőfokú egyenlet, egyenlőtlenség, értelmezési tartomány, azonosság. Ekvivalens átalakítás, hamis gyök. Másodfokú egyenlet, egyenlőtlenség, megoldóképlet, diszkrimináns. Egyenletrendszer. Négyzetgyökös egyenlet. Paraméteres egyenlet. Magasabb fokú egyenletek. Exponenciális és logaritmikus egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria Alapfogalmak, ponttálmazok, egybevágósági transzformációk	Órakeret 53 óra
Előzetes tudás	Tételek kölcsönös helyzete, távolsága. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Speciális háromszögek, négyszögek elnevezése, felismerése, tulajdonságaik. Háromszögek szerkesztése alapadatokból. A Pitagorasz-tétel ismerete. Geometriai transzformációk, a szimmetria felismerése környezetünkben, alkalmazásuk egyszerű feladatokban.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. A szükséges és az elégséges feltétel felismerése. Összetett számítási probléma lebontása, számítási terv készítése (megfelelő részlet kiválasztása, a részletszámítások logikus sorrendbe illesztése). A geometriai transzformációk átfogó ismerete, alkalmazása problémamegoldásban. Szimmetria szerepének felismerése a matematikában, a művészetekben. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Geometriai alapfogalmak, axiómák. Tételek; kölcsönös helyzete, távolsága, szöge síkban és térben. Skatulyaelvvel megoldható geometriai feladatok. Háromszögek szögei, oldalai közti összefüggések. Négyszögek. Sokszögek szögösszege, átlók száma.	<i>Fizika:</i> szögsebesség, szöggyorsulás. <i>Vizuális kultúra:</i> térbeli viszonyok.
Nevezetes ponthalmazok rendszerezése. – adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben; – két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. – Parabola, ellipszis, hiperbola. Egyenlőtlenséggel meghatározott ponthalmazok. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek. Matematikatörténet: Descartes. Két vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése. Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei. Háromszög további nevezetes vonalai. Középvonalak.(Négyszögek középvonalai is.) Varignon-tétel. Magasságok – magasságpont. Súlyvonalak – súlypont. Geometriai szerkesztőprogram használata, bemutatása grafikus programmal.	<i>Fizika:</i> parabolatükör. <i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata. <i>Fizika:</i> égitestek pályája; izotermikus állapotváltozás.
Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása. Számítási feladatok síkban és térben. Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban. Mikor hegyesszögű, illetve tompaszögű a háromszög? Két pont távolsága koordináta-rendszerben. A paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Négyszög átlói merőlegességének feltétele. Matematikatörténet: Pitagorasz.	<i>Fizika:</i> vektor felbontása merőleges összetevőkre.
Thalész tétele és a tétel megfordítása. Szerkesztési és bizonyítási feladatok. Körérintő szerkesztése.	

Matematikatörténet: Thalész.		
Geometriai transzformáció fogalma. Egybevágósági transzformációk rendszerező ismételése. Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás. A geometriai transzformációk tulajdonságai: – fixpont, fix egyenes, fix sík, – szögtartás, távolságtartás, irányítástartás. Szimmetrikus ponthalmazok, szimmetrián alapuló játékok. Geometriai transzformációk szorzata.		<i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram használata.
Geometriai szélsőérték-feladatok. Háromszögbe írt minimális területű háromszög. Izogonális pont.		<i>Földrajz:</i> minimális utak meghatározása.
Az egybevágóság fogalma. Ponthalmazok egybevágósága. A háromszögek egybevágóságának alapesetei.		
Műveletek vektorokkal: Összeadás, kivonás, számmal való szorzás. Vektorfelbontás tétele. Osztópont helyvektora, háromszög súlypontjának helyvektora. Feuerbach-kör. Vektorok térben. Vektor koordinátái. Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel.		<i>Fizika:</i> vektormennyiségek: erő, sebesség, gyorsulás, térerősség.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Tételelem, sokszög, Pitagorasz-tétel, Thalész-tétel, egybevágósági transzformáció. Vektor.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria Hasonlóság és kapcsolódó tételek	Órakeret 56 óra
Előzetes tudás	Egybevágósági transzformációk. A háromszögek egybevágóságának alapesetei. Számítási és mértani közép. A számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. A definíciók és tételek pontos ismerete. Bizonyítások gyakorlása. Tájékozódás valóságos viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján. Valós probléma geometriai modelljének megalkotása, számítások a modell alapján, az eredmények összevetése a valósággal. Számítógép használata geometriai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A párhuzamos szelők tétele és megfordítása, következmények. Szögfelező tétel. A párhuzamos szelőszakaszok tétele. Szakasz arányos osztása. Negyedik arányos szerkesztése.		

A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai. A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai. Szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok. Euler-egyenes.	<i>Földrajz:</i> térképek. <i>Vizuális kultúra:</i> építészeti tervrajzok. <i>Fizika:</i> optikai eszközök nagyítása.
Hasonló ponthalmazok. A háromszögek hasonlóságának alapesetei. A sokszögek hasonlósága. Heron-képlet A hasonló síkidomok területének aránya. A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya. Annak tudatosítása, hogy kicsinyítésnél, nagyításnál a lineáris méretek, a felszín és térfogat nem egyformán változik.	<i>Fizika:</i> hasonló háromszögek alkalmazása – lejtőmozgás, geometriai optika. <i>Biológia-egészségtan:</i> példák arra, amikor az a hasznos, hogy adott térfogathoz nagy felszín, illetve, amikor adott térfogathoz kis felszín tartozzon.
Arányossági tételek háromszögekben. Magasságtétel, befogótétel. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása. Mértani közép szerkesztése. Egyszerű szélsőérték-feladatok. Ceva és Menelaosz tétele.	<i>Vizuális kultúra:</i> festészet, építészet. <i>Ének-zene:</i> az aranymetszés megjelenése zenei művekben.
Két kör közös érintői. Középponti szög, a hozzá tartozó körív és körcikk. Szögek mérése. Kerületi és középponti szögek tétele. Kerületi szögek tétele. Látószögekörív. Húrnégyszög tétele és megfordítása. Feuerbach-kör. Érintőnégyyszögek tétele és megfordítása. A talpponti háromszög tulajdonságai. Ptolemaiosz-tétel. Érintő és szelőszakaszok tétele. Szelőszakaszok tétele. Aranymetszés. Pontnak körre vonatkozó hatványa.	
További nem távolságtartó transzformációk. Merőleges affinitás. Kapcsolat a függvénytranszformációkkal. Inverzió és tulajdonságai.	
Matematikatörténet: Euler. Ptolemaiosz, Feuerbach, Héron.	

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Hasonlósági transzformáció, hasonló ponthalmaz, számtani és mértani közép.
------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények Algebrai függvények	Órakeret 37 óra
Előzetes tudás	Halmazok. Hozzárendelés fogalma. Grafikonok készítése, olvasása. Pontok ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris függvények, fordított arányosság függvénye.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A tanult függvények felidézése. Függvénytranszformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénymodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába. Logikus, pontos gondolkodás, fogalmazás fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Függvény fogalma. Rendszerező ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, szélsőérték. Új fogalmak: periodicitás, paritás, korlátosság. (Pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha...) Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása. Pontos fogalmazás.		<i>Informatika:</i> függvényábrázolás, grafikonkészítés számítógépes program segítségével. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> hétköznapi és szaknyelvi szóhasználat.
Fordított arányosság, elsőfokú törtfüggvény.		<i>Fizika; kémia:</i> fordítottan arányos mennyiségek.
Lineáris függvények. Rendszerező ismétlés. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapiakban.		<i>Fizika; kémia:</i> egyenesen arányos mennyiségek.
Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Egészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-féle függvény. Gyökfüggvények. Függvények inverze. Összetett függvények.		
Exponenciális függvények.		
Logaritmus függvények.		<i>Fizika: régészeti leletek –</i>

	kormeghatározás.
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. $f(ax + b)$ ábrázolása A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $f(x)$ és $f(x)$ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.	
A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése. Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat – aranymetszés. Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása. Matematikatörténet: Fibonacci.	<i>Informatika:</i> algoritmusok.
Számtani sorozat. A számtani sorozat n-edik tagja. A számtani sorozat első n tagjának összege. Mértani sorozat. A mértani sorozat n-edik tagja. A mértani sorozat első n tagjának összege. Számítási feladatok számtani és a mértani sorozatokra. Szöveges feladatok gyakorlati alkalmazásokkal. A számtani sorozat mint lineáris és a mértani sorozat mint exponenciális függvény összehasonlítása. Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása. Törlesztési feladatok. Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel, THM, gyűjtőjáradék. Véges sorok összegzése. Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése. Teleszkópos összegek.	<i>Fizika; kémia;</i> <i>biológia-egészségtan;</i> <i>földrajz; történelem,</i> <i>társadalmi és</i> <i>állampolgári</i> <i>ismeretek: lineáris és</i> <i>exponenciális</i> <i>folyamatok.</i> <i>Technika, életvitel és</i> <i>gyakorlat: hitel –</i> <i>adósság – eladósodás.</i>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás. Függvénygrafikon, függvénytranszformáció. Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények. Hegyesszőgek szögfüggvényei, szögfüggvények általánosítás	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Hasonlóság alkalmazása számolási feladatokban. Pitagorasz-tétel.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Síkbeli és térbeli ábra készítése a valós geometriai problémáról. Számítási feladatok, a megoldáshoz alkalmas szögfüggvény megtalálása. Számológép, számítógép használata.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Távolságok, magasságok meghatározása arányokkal. A valóság kicsinyített ábrájáról szögeket és szakaszokat határozunk meg méréssel és számolással. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója. Szögfüggvény értékének meghatározása számológéppel. Számítási feladatok szögfüggvények használatával síkban és térben.		<i>Fizika:</i> lejtőn mozgó testre ható erők kiszámítása.
Pótszögek szögfüggvényei. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30° ; 60° ; 45° . (Megtanulandók.) 18° , 36° , 54° , 72° . (Kiszámolás az „aranyháromszögből”.)		
A szögfüggvények általános értelmezése. Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták. A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben. Szögfüggvények közötti összefüggések. Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása. A trigonometrikus függvények. A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás. A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat. Egyszerű trigonometrikus egyenletek.		<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás, hullámmozgás leírása. <i>Informatika:</i> grafikonok elkészítése számítógépes programmal.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szögfüggvény.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika, valószínűség	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Kombinatorikai ismeretek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség és a relatív gyakoriság fogalmának mélyítése, kapcsolatuk belátása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Véletlen jelenségek megfigyelése. Kocka- és pénzérmedobások – csoportmunka.		<i>Informatika:</i> véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.
Esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény. Műveletek eseményekkel. Egyszerűbb események valószínűsége. Klasszikus valószínűségi modell.		

A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.	
Geometriai valószínűség. Feltételes valószínűség, függetlenség. Teljes valószínűség tétele, Bayes tétele.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Esemény, valószínűség.

A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i> – Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, pontthalmazokra. – Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Definíció, tétel felismerése, az állítás és megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése. – Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita és skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során. – Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása. – Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére. <i>Számelmélet, algebra</i> – Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása. – Számok normálalakja, normálalakkal végzett műveletek alkalmazása. – Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása. – Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása. – Prímekre vonatkozó tételek, sejtések ismerete. – Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása. – A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása. – Első- és másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szóveges feladatok megoldása. – Másodfokú függvényekre vezető szélsőérték-problémák megoldása. – Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték-problémák megoldásában. – A számológép használata. <i>Geometria</i> – Tételek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése. – Nevezetes pontthalmazok rendszerezése, alkalmazása. – A kör és részeinek ismerete. – Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnéyszögek tételei). – Egybevágósági és hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete. – Egybevágó pontthalmazok, hasonló pontthalmazok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
---	---

	– Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. Vektorfelbontás, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben. – Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban. – A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása. – Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása. – Ceva-, Menelaosz-, Ptolemaiosz-, Euler-tétel ismerete, alkalmazása. Trigonometria – A hegyesszögek szögfüggvényei. – A szögfüggvények általánosítása. <i>Függvények, sorozatok</i> – A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete: korlátosság, periodicitás. – Függvény ábrázolása, jellemzése. – Függvénytranszformációk elvégzése. – Számtani és mértani sorozat. – Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján. <i>Valószínűség, statisztika</i> – Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A műveletek elvégzése az eseménytérben. – A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása. – A geometriai valószínűség alkalmazása.
--	--

11–12. évfolyam

Ez a szakasz az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, és egyben kiteljesíti a kapcsolatokat a többi tantárggyal, valamint a mindennapi élet matematikaigényes elemeivel. A matematikatanulásban kialakult rendszeresség, problémamegoldó képesség az élet legkülönbözőbb területein segíthet. Ezt célszerű tudatosítani a tanulóknál.

Ez a kerettantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó képességen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok, gyakorlati és elméleti területen széles körben használható tudást is közvetítünk, amelyek összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Az érettségi előtt már elvárható a tanulóktól többféle készség és ismeret együttes alkalmazása. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A sorozatok, kamatos kamat témakör kiválóan alkalmas a pénzügyi, gazdasági problémákban való jártasság kialakításra. A korábbiaknál is nagyobb hangsúlyt kell fektetni a

különböző gyakorlati problémák optimumát kereső feladatokra. Ezért az ilyen problémák elemi megoldását külön fejezetként iktatjuk be.

Az analízis témakörben a szemléletesség segíti a problémák átlátását, az egzakttság pedig a felsőfokú képzésre való készülést.

A rendszerező összefoglalás, túl azon, hogy az eddigi matematikatanulás szintézisét adja, mintaként szolgálhat a későbbiekben is bármely területen végzett összegző munkához.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Halmaz fogalma, halmaz számossága. Kölsönösen egyértelmű hozzárendelés. Bizonyítási módszerek.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Korábban megismert fogalmak ismételése, elmélyítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrái számok, transzcendens számok. Halmazok számossága. Halmazok ekvivalenciája. Számosság. Végtelen és véges halmazok. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. Kontinuumsejtés. Matematikátörténet: Cantor, Hilbert, Gödel.		<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Bizonyíthatóság.
A matematika felépítése. Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések. Műveletek a matematikában. Műveleti tulajdonságok. Relációk a matematikában és a mindennapi életben. Relációtulajdonságok. Bizonyítási módszerek áttekintése. Direkt, indirekt bizonyítás, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.		<i>Filozófia:</i> Gondolati rendszerek felépítése. Állítások igazolásának szükségessége.
Kulcsfogalmak/fogalmak	Művelet, reláció. Halmazok számossága, megszámlálható és nem megszámlálható halmaz. Bizonyítási módszer. A matematika axiomatikus felépítése.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Trigonometria	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Vektorokkal végzett műveletek. Hegyesszögek szögfüggvényei, a szögfüggvények általános értelmezése, szögmérés fokban és radiánban, szögfüggvények közötti egyszerű összefüggések, trigonometrikus	

	függvények.
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai látásmód fejlesztése. A művelet fogalmának bővítése egy újszerű művelettel, a skaláris szorzással. Algebrai és geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban. A tanultak felfedezése más tudományterületeken is. A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik. A vektor 90° -os elforgatottjának koordinátái.	
Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban. Merőleges vektorok skaláris szorzata. Szükséges és elégséges feltétel. Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével. A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata.	<i>Fizika:</i> munka, elektromosságtan.
A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével. A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével. Szinusztétel. Koszinusztétel. A tételek pontos kimondása, bizonyítása. Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel. Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata. Szög, távolság, terület meghatározása. Bizonyítási feladatok.	<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> ponthalmazok adatainak meghatározása. <i>Földrajz:</i> távolságok, szögek kiszámítása – terepmérési feladatok. GPS-helymeghatározás.
Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek: – két szög összegének és különbségének szögfüggvényei, – egy szög kétszeresének szögfüggvényei, – félszögek szögfüggvényei, – két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása. A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása. Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása. Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel. Tangenstétel.	
Trigonometrikus egyenletek. (Ekvivalens átalakítások.) Trigonometrikus egyenlőtlenségek. Trigonometrikus egyenletrendszerek. Paraméteres trigonometrikus feladatok. Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata.	<i>Fizika:</i> rezgőmozgás, adott kitéréshez, sebességhez, gyorsuláshoz tartozó időpillanatok

Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.		meghatározása.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria. Kúpszeletek	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Nevezetes ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A sík- és térgeometriai szemlélet, látásmód fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Parabolát, ellipszist, hiperbolát jellemző paraméterek. Kúpszeletek érintői. Kúpszeletek származtatása (Dandelin-gömbök). Mértani helyek.		<i>Fizika:</i> csillagászat.
Kulcsfogalmak	Parabola, ellipszis, hiperbola, fókuszpont, vezéregyenes.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Koordinátagéometria	Órakeret 54 óra
Előzetes tudás	Koordináta-rendszer, vektorok, vektorműveletek megadása koordinátákkal. Ponthalmazok koordináta-rendszerben. Függvények ábrázolása. Elsőfokú, másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása. A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel. Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel. Számítógép használata.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A Descartes-féle koordináta-rendszer. A helyvektor és a szabadvektor. Rendszerező ismételtes.		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
Vektor abszolút értékének kiszámítása. Két pont távolságának kiszámítása. A Pitagorasz-tétel alkalmazása. Két vektor hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.		
Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái. Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.		<i>Fizika:</i> ponthalmazok tömegközéppontja.

Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens. A különböző jellemzők közötti kapcsolat értéke, használata. Az egyenes egyenletei. – Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete. – Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben. – Iránytényezős egyenlet. Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel. Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata. A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása. Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele. Két egyenes metszéspontja. Két egyenes hajlásszöge. Skaláris szorzat használata.	<i>Fizika:</i> mérések értékelése. <i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
A kör egyenlete. Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata. Kör és egyenes kölcsönös helyzete. A kör érintőjének egyenlete. Két kör közös pontjainak meghatározása. Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió. Szerkeszthetőségi kérdések. Két kör közös érintőinek egyenlete.	<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.
A parabola tengelyponti egyenlete. A parabola és a másodfokú függvény. A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete. A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.	<i>Fizika:</i> geometriai optika, fényszóró, visszapillantó tükör.
Ellipszis és hiperbola egyenlete.	<i>Fizika:</i> égitestek pályája.
Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy a szerkesztés menetének követésével. Mértani helyek keresése. Apollóniosz-kör. Merőleges affinitással kapott mértani helyek. Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek. Lineáris programozási feladat.	<i>Informatika:</i> több feltétel együttes vizsgálata.
Térbeli koordináta geometria. Vektorok vektoriális szorzata. Egyenes egyenletrendszere. Sík egyenlete. Egyenes és sík metszéspontja.	

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola, ellipszis és hiperbola egyenlete.
------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Sorozatok	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	Számtani sorozat, mértani sorozat fogalma, egyszerű alapösszefüggések.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A hétköznapi életben, matematikai problémában a sorozattal leírható mennyiségek észrevétele. Sorozatok megadási módszereinek alkalmazása. Összefüggések, képletek hatékony alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája. A határérték szemléletes és pontos definíciói. Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok. Nevezetes sorozatok határértéke. Konvergens sorozatok tulajdonságai, konvergenciakritériumok. Torlódási pont. Konvergens sorozatnak egy határértéke van. Minden konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens. Az e szám. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrlv.		
Végtelen sorok. Végtelenen sor konvergenciája, összege. Végtelen mértani sor. Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása. További példák konvergens sorokra. Teleszkópos összegek. Négyzetszámok reciprokainak összege. Példák nem konvergens sorokra. Harmonikus sor. Feltételesen konvergens sorok. Cantor-axióma. A kör kerülete.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Korlátosság, monotonitás, konvergencia, divergencia. Sor, sor összege, végtelen mértani sor.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása	Órakeret 8 óra
Előzetes tudás	Nevezetes azonosságok ismerete. Középek és sorrendjük ismerete két és több változóra.	
A tematikai egység	Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása. A modell	

nevelési-fejlesztési céljai	hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal. A szélsőérték-problémához illő megoldási mód kiválasztása. Gyakorlat optimális megoldások keresésében.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Azonos egyenlőtlenségek. Rendezési tétel. Bernoulli-egyenlőtlenség. Cauchy-egyenlőtlenség. Jensen-egyenlőtlenség. (Bizonyítás nélkül, szemléletes képpel.)		<i>Környezetvédelem:</i> legrövidebb utak és egyéb optimális módszerek keresése.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Szélsőértékhely, szélsőérték.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Folytonosság, differenciálszámítás	Órakeret 54 óra
Előzetes tudás	Függvények megadása, értelmezési tartomány, értékészlet. Függvények jellemzése: zérushely, korlátosság, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás. Sorozatok határértéke.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével. A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása. A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára. A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése. Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver alkalmazása függvények grafikonjának megrajzolására.
A függvények folytonossága. Példák folytonos és nem folytonos függvényekre. A folytonosság definíciói. Intervallumon folytonos függvények. Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.		<i>Fizika:</i> példák folytonos és diszkrét mennyiségekre.
Függvény határértéke. A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések. Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke. A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata. A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.		<i>Informatika:</i> a határérték számítógépes becslése. <i>Fizika:</i> felhasználás $\sin x$, illetve $\tan x$ közelítésére kis szög esetében.

Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére. A függvénygörbe érintőjének iránytangense. A pillanatnyi sebesség meghatározása.	<i>Fizika:</i> Az út-idő függvény és a pillanatnyi sebesség kapcsolata. A fluxus és az indukált feszültség kapcsolata. <i>Biológia-egészségtan:</i> populáció növekedésének átlagos sebessége.
A differenciálhatóság fogalma. A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény. Példák nem differenciálható függvényekre is. Grafikon érintőjének egyenlete Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között. Alapfüggvények deriváltja: Konstans függvény, x^n, trigonometrikus függvények deriváltja. Műveletek differenciálható függvényekkel. Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja. Inverz függvény deriváltja. Exponenciális és logaritmushüggvény deriváltja. Magasabb rendű deriváltak. Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.	<i>Fizika:</i> harmonikus rezgőmozgás kitérése, sebessége, gyorsulása – ezek kapcsolata.
A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata. – Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény. – Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása. Középértéktételek. Rolle- és Lagrange-tétel. L'Hospital-szabály.	<i>Fizika:</i> fizikai tartalmú függvények (pl. út-idő, sebesség-idő) deriváltjainak jelentése.
Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexiós pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.	
Függvényvizsgálat differenciálszámítással. Összevetés az elemi módszerekkel.	
Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása. A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.	<i>Fizika:</i> Fermat-elv, Snellius–Descartes-törvény. Fizikai jellegű szélsőérték-problémák.

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény.
------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Integrálszámítás	Órakeret 44 óra
Előzetes tudás	Folytonos függvények fogalma. Sorozatok, véges sorok. Differenciálási szabályok ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az integrálszámítás módszereivel találkozáskor a közelítő módszerek ismeretének bővítése. A függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Bevezető feladatok az integrál fogalmához. Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület. A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.		
Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Példa nem integrálható függvényre is. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása. Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. Matematikatörténet: Bernhard Riemann.		<i>Informatika:</i> számítógépes szoftver használata.
Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele. Korlátos és monoton függvények integrálhatósága. A határozott integrál tulajdonságai.		<i>Fizika:</i> A munka és a mozgási energia. Elektromos feszültség két pont között, a potenciál. Tehetlenségi nyomaték. Ponttálmaz tömegközéppontja. A hidrosztatikai nyomás és az edény oldalfalára ható erő. Effektív áramerősség.
Az integrál mint a felső határ függvénye. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja. Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás		

között. A primitív függvény fogalma. A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál: – hatványfüggvény, polinomfüggvény, – trigonometrikus függvények, – exponenciális függvény, logaritmusfüggvény. A Newton-Leibniz-tétel. Integrálási módszerek: - Integrálás helyettesítéssel. - Parciális integrálás. Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.		
Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra. Két függvénygörbe közötti terület meghatározása. Forgástest térfogatának meghatározása. Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata. Az integrálás közelítő módszerei.		<i>Fizika:</i> Potenciál, munkavégzés elektromos, illetve gravitációs erőterben. Váltakozó áram munkája, effektív áram és feszültség. Newton munkássága.
Néhány egyszerűbb improprius integrál. Néhány hatványsor. Hatványsorok szerepe a matematikában, fizikában, informatikában. Hogyan számolnak az egyszerű számológépek 12 jegy pontossággal?		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Alsó és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel. Forgástest térfogata.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Térgeometria	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Területszámítás, kerületszámítás, síkidomok tulajdonságai, nevezetes pontthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Áttekinthető kép kialakítása a térgeometriáról, a felszín- és térfogatszámítás módszereiről.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Testek származtatása. Szabályos testek. Tételek szögének és távolságának meghatározása különböző testek esetén.		<i>Vizuális kultúra:</i> axonometria. <i>Kémia:</i> kristályok. <i>Művészetek:</i> szimmetriák
A területszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb pontthalmaz területének levezetése az		<i>Informatika:</i> tantárgyi szimulációs

alapelvekből. A területszámítás módszereinek áttekintése. Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben.	programok használata (geometriai szerkesztőprogram)
A térfogatszámítás alapelvei. Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből. Téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp. A térfogatszámítás néhány új eleme. Cavalieri-elv. Csonka gúla térfogata. Érintőpoliéderek térfogata. Ponthalmazok felszíne, hálóját. Csonka kúp felszíne. Gömb térfogata, felszíne.	<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> a mindennapjainkban előforduló térbeli alakzatok modellje, absztrakciója. <i>Vizuális kultúra:</i> építészet.
Tetraéderekre vonatkozó tételek. Ortogonalis tetraéder. Tetraéder és paralelepipedon. Euler-féle poliédertétel. Testekbe, illetve testek köré írható gömb.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Felszín, térfogat, hengerverszerű test, kúpszerű test, forgástest, csonka gúla, csonka kúp.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Statisztika, valószínűség	Órakeret 24 óra
Előzetes tudás	Adatok elemzése, táblázatok, grafikonok használata. Terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás. Klasszikus valószínűségi modell.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése. A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására. Ismeretek rendszerezése. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, a kísérletek kiértékelése, következtetések. Diagram készítése, olvasása. Táblázat értelmezése, készítése. Számítógép használata az adatok rendezésében, értékelésében, ábrázolásában.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása. Adatok rendezése, elemzése, táblázatba rendezése, ábrázolása grafikonokon, osztályokba sorolása. Statisztikai mintavétel. Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül. Közüvélemény-kutatás. Statisztikai évkönyv. Minőség-ellenőrzés. Adathalmazok jellemzői: terjedeleme, átlag, medián, módusz, szóródásmértékek.		<i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> választások. <i>Földrajz:</i> időjárási, éghajlati és gazdasági statisztikák.

	<i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek: történelmi, társadalmi témák vizuális ábrázolása (táblázat, diagram).</i>
Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások. Várható érték. Szórás. Csebisev-egyenlőtlenség. Markov-egyenlőtlenség. Nagy számok törvénye. Matematikatörténet: Pólya György, Rényi Alfréd.	<i>Informatika: véletlen jelenségek számítógépes szimulációja.</i>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Módusz, medián, átlag, szóródás, valószínűségi változó, eloszlás.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra. Lineáris algebra	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Vektor, reláció, művelet, műveleti tulajdonságok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A vektor fogalmának bővítése, mátrix ismerete, mátrixműveletek megismerése, alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Determináns. Sarrus-szabály. Kifejtési tétel. Determinánsra vonatkozó tételek. Sor- és oszlopvektorok, mátrixok. Vektorok és mátrixok összeadása, számmal való szorzása. Lineáris kombináció, lineáris függőség, függetlenség. Lineáris vektortér, a vektortér bázisa. Lineáris egyenletrendszerek. A lineáris programozás elemei. Mátrixok inverze.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektor, mátrix, lineáris egyenletrendszer, determináns.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra. Komplex számok	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Valós számok, és valós számok körében végzett műveletek. Trigonometriai ismeretek.	

A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Számhalmazok bővítésének elvei.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig. Algebrai számok, transzcendens számok. Komplex számok, komplex számsík. Műveletek komplex számokkal. Geometria feladatok megoldása komplex számok alkalmazásával.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Komplex számok, komplex számsík.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Szabadon választható témakör	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	A témakörhöz szükséges tudás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A témakörnek megfelelően.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A témakörnek megfelelően.		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	A témakör kulcsfogalmai.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Rendszerező összefoglalás	Órakeret 86 óra
Előzetes tudás	A 4 év matematika-tananyaga.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek rendszerezése, alkalmazása az egyes témakörökben. Felkészítés az emelt szintű érettségire: az önálló rendszerzés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, alkalmazási lehetőségek megtalálása. Kapcsolatok keresése különböző témakörök között. Elemzőkészség, kreativitás fejlesztése. Felkészítés a felsőfokú oktatásra.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Gondolkodási módszerek Halmazok, matematikai logika Halmazok, megadási módjaik, részhalmaz, kiegészítő halmaz. Halmazok közötti műveletek. Végtelen halmazok elmélete; számosságok. Állítások, logikai értékük.		<i>Filozófia</i> : gondolati rendszerek felépítése, fejlődése.

Negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Univerzális és egzisztenciális kvantor. Kombinatorika, gráfok, algoritmusok Permutáció, variáció, kombináció. Binomiális tétel. Pascal-háromszög. Elemi gráfelméleti ismeretek. Euler-féle poliédertétel. A bizonyítások fejlődése és a bizonyítási módszerek változása. Nevezetes sejtések.	
Algebra és számelmélet Műveletek kifejezésekkel Algebrai kifejezések átalakításai, nevezetes szorzatok. A hatványozás azonosságai. Matematikai fogalmak fejlődése, permanenciaelv. Gyökös kifejezések átalakításai. Exponenciális és logaritmikus kifejezések átalakításai. Számelmélet Oszthatósági szabályok. Számolás maradékokkal. Prímszámok. Oszthatósági feladatok megoldása. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek Lineáris és lineárisra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Polinomok algebrája. Paraméteres egyenletek, egyenlőtlenségek Komplex számok Lineáris algebra	<i>Fizika; kémia:</i> számítási feladatok megoldása.
Geometria Geometriai alapfogalmak Tételek köcsönös helyzete, távolsága, szöge. Geometriai ponthalmazok, bizonyítások Nevezetes ponthalmazok. Síkdomok, testek, tulajdonságaik. Elemi sík- és térgeometriai tételek. Geometriai transzformációk Egybevágósági és hasonlósági transzformációk, tulajdonságaik. Szerepük a bizonyításokban és a szerkesztésekben. Vektorok, trigonometria, koordinátagometria Vektor fogalma, műveletek a vektorok körében. Matematikai fogalmak fejlődésének követése. Vektorfelbontás, vektorok koordinátái. Hegyeszög szögfüggvényei. Szinus- és koszinusztétel.	<i>Művészetek:</i> szimmetriák, aranymetszés. <i>Informatika:</i> számítógépes geometriai programok használata.

A háromszög hiányzó adatainak kiszámolása. Trigonometrikus azonosságok. Az egyenes egyenletei, egyenletrendszer (síkban és térben). A kör egyenletei. A kúpszeletek definíciója, egyenleteik. Geometriai mértékek A hosszúság és a szög mértékei. Kiszámolási módjaik. A kétoldali közelítés módszere. A terület fogalma és kiszámítási módjai. A felszín és térfogat fogalma és kiszámítási módjai. Az integrálszámítás felhasználása pontthalmazok mértékének kiszámításához.	
Függvények, sorozatok, az analízis elemei Függvények A függvény fogalma. Függvények rendszerezése a definiáló kifejezés szerint: konstans, lineáris, egészrész, törtrész, másodfokú, abszolút érték, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus függvények. Függvények rendszerezése tulajdonságaik szerint. Függvénytranszformációk. Valós folyamatok elemzése függvénytan modellek szerint. Sorozatok, sorok A sorozat fogalma. Számítási, mértani sorozat. Rekurzióval megadott egyéb sorozatok. Sorozatok monotonitása, konvergenciája. A végtelen mértani sor. Analízis Függvények korlátossága és monotonitása. Függvény határértéke, folytonossága. Differenciálhányados, derivált függvény. Differenciálási szabályok. L'Hospital-szabály. Függvényvizsgálat differenciálás segítségével. Szélsőérték-meghatározási módok. A tanult függvények primitív függvényei. Integrálási módszerek. A határozott integrál. Newton–Leibniz-tétel. A határozott integrál alkalmazásai. Improprius integrál.	<i>Informatika:</i> számítógépes programok használata függvények ábrázolására, vizsgálatára. <i>Fizika:</i> Az analízis alkalmazásai a fizikában. A matematika és a fizika kölcsönhatása az analízis módszereinek kialakulásában.
Valószínűség-számítás, statisztika Statisztikai alapfogalmak: módus, medián, átlag, szórás. Eseményalgebra és műveleti tulajdonságai. Teljes eseményrendszer. A matematika különböző területeinek összekapcsolása. Grafikonok, táblázatok, diagramok készítése és olvasása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. A valószínűség kiszámítási módjai.	<i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata. <i>Fizika:</i> fizikai jelenségek valószínűség-számítási

Feltételes valószínűség. Mintavételi feladatok klasszikus modell alapján. Szerepük a mindennapi életben. A véletlen szabályszerűségei, a nagy számok törvénye. A közvélemény-kutatás elemei.	modellje.
Motivációs témakörök Néhány matematikatörténeti szemelvény. A matematikatörténet néhány érdekes problémájának áttekintése. (Pl. Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról.) Matematikusokkal kapcsolatos történetek. Matematika alapú játékok. Logikai feladványok, konstrukciós feladatok. A matematika néhány filozófiai kérdése. A matematika fejlődésének külső és belső hajtóerői. Néhány megoldatlan és megoldhatatlan probléma.	<i>Informatika:</i> könyvtárhasználat, internethasználat.

A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<i>Gondolkodási és megismerési módszerek</i> – Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése. – A kombinatorikai problémák rendszerezése. – Bizonyítási módszerek áttekintése. – A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában. <i>Számelmélet, algebra</i> – A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete. – A logaritmus fogalmának ismerete. – A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben, probléma megoldása céljából. – Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése. – Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása. – Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése. – A számológép biztos használata. <i>Geometria</i> – Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták. – Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata. – Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása. – A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása. – Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése. – Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása. <i>Függvények, az analízis elemei</i> – Exponenciális, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése. – Függvénytranszformációk.
--	---

	– Exponenciális folyamatok matematikai modellje. – A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok. – Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése. – Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése. – A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával. – Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása. <i>Valószínűség, statisztika</i> – Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében. – A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja. – Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.
--	---

MATEMATIKA

7-12. évfolyam, speciális tagozat

Az 50 éve eredményesen (az első 30 évben négy évfolyamos, az utóbbi 20 évben már hat évfolyamos formában is) működő speciális matematika tagozatok tantervének átalakítása két okból indokolt. Az egyik: a matematikatudomány és a természettudományok fejlődése során felmerülő új problémák beemelése a közoktatásba. A másik: az új (elsősorban informatikai) eszközök alkalmazásának beépítése a tanítás-tanulás folyamatába.

A speciális matematika tagozatos tanterve több cél együttes megvalósulásának szem előtt tartásával készült.

Egyrészt a matematika történeti fejlődésének, ezzel együtt nyitottságának bemutatása abból a célból, hogy a diákok egy-egy probléma megoldása során bátran alkalmazzák a tanult eszközöket, képesek legyenek új összefüggések felismerésére, nyitottak az új, általuk ismeretlen eszközök és módszerek befogadására. Középiskolai tanulmányaik befejeztével motiváltak legyenek a tanultak széleskörű alkalmazására, a megoldatlan problémák megoldásának kutatására. Másrészt cél a matematika „különálló” részterületei (pl. algebra, számelmélet, geometria, analízis) közötti belső összefüggések felismertetése, azok egységben kezelése, valamint a természettudományok matematikai alapjainak tudatosítása, elsajátíttatása.

A speciális matematika tagozaton – a fő célok megvalósítása érdekében – elengedhetetlen a definíciók pontos ismerete, a tételek bizonyítása, az ehhez szükséges módszerek elsajátíttatása.

A tanterv összeállításának legnehezebb eleme annak eldöntése, hogy mely ismeretek átadása „hagyható ki” anélkül, hogy az egységben láttatás ne sérüljön, a tanulók későbbi tanulmányai és munkája során végzendő alkotómunka megalapozása teljes mértékben megtörténjen.

A speciális matematika tagozaton tanító tanároknak éppúgy, mint a közoktatás bármely más területén dolgozóknak, mindenek előtt az *életkori sajátosságok* szem előtt tartása a módszertani alapelvük. A középiskolai tanulmányok hat éve alatt minden évben annyit és csak annyit szabad megtanítani, amennyit a diák teljes mértékben meg tud érteni, be tud építeni a gondolkodásába. A matematikatanítás célja az *alkotó gondolkodásra* nevelés. El kell érni, hogy a diákok meg tudják fogalmazni kérdéseiket, a felvetődött problémákra adott válaszaikat, képesek legyenek gondolataikból és a tanult ismeretekből tiszta, pontos logikai láncot alkotva bizonyítani, cáfolni, új problémákat felvetni. A rendelkezésre álló időkeret meghatározó hányadát a gyakorlás, az alkalmazás kell, hogy kitöltse.

A speciális matematika tagozat egyik megkülönböztető erénye más matematikatanítási formákkal szemben a tanórákra tervezett, *közösségben, azaz osztály/csoportkeretben történő* tehetséggondozás. A diákokat képessé kell tenni arra, hogy társaiktól tanuljanak, társaikkal együttműködve sokszorozzák meg tudásukat, a tanórák minden perce értékes, építő, gazdagító munkával teljen valamennyi diák számára; a differenciált feladatkitűzés és a frontális munka optimális arányainak megválasztásával.

A türelem, az együttműködés, „a szakmai vita”, ezzel a tévedés jogának biztosítása, az elmélyült önálló tevékenység és a közös munka optimális arányának megtalálása a legfontosabb módszertani elemek.

A speciális matematika tagozaton a hagyományos eszközök (tankönyvek, példatárak) továbbra is meghatározó jelentőséggel bírnak. Az informatikai eszközök elsősorban *segédeszközök*, amelyek a szemléltetést segítik és kibővítik az ismeretek alkalmazásának körét. Az eszközök használatának magas szintű ismerete szükséges. Öncélú alkalmazásuk a tanítás folyamatában a speciális matematika tagozaton kontraproduktív lehet. (Elvonhatja a figyelmet a problémafelismeréstől, félrevezetheti a diákot a gondolkodási folyamat hosszát és

lépéseit illetően.) Másrészről viszont a modern matematika tanításának nélkülözhetetlen eszközei, amelyek nélkül az alkalmazásképes tudás és a későbbi alkotómunka elképzelhetetlen. A tanár feladata a helyes arányok megtalálása.

7-8. évfolyam

Az új iskolatípus lehetőséget nyújt arra, hogy pozitív motivációval hozzásegítsünk minden tanulót a matematikai gondolkodás örömeinek megismeréséhez. Tizenhárom éves kortól a tanulók mindinkább általánosító elképzelésekben, elvont konstrukciókban gondolkoznak. Elméleteket gyártanak, összefüggéseket keresnek, próbálják értelmezni a világot. Az iskolai tanítás csak akkor lehet eredményes, ha alkalmazkodik ezekhez a változásokhoz, illetve igyekszik azokat felhasználva fejleszteni a tanulókat. A matematika kiválóan alkalmas arra, hogy a rendszerező képességet és hajlamot fejlessze. Ebben a két évfolyamban mindinkább szükséges matematikai szövegeket értelmezni és alkotni. Segítsük, hogy a tanulók a problémamegoldásaik részeként többféle forrásból legyenek képesek ismereteket szerezni.

Ebben a korban a tanításban már meg kell jelennie az elvonatkoztatás és az absztrakciós készség felhasználásának, fejlesztésének. A matematika tanításában itt jelenik meg a konkrét számok betűkkel való helyettesítése, a tapasztalatok általános megfogalmazása. Ezekben az évfolyamokban már komoly hangsúlyt kell helyeznünk arra, hogy a megsejtett összefüggések bizonyításának igénye is kialakuljon. A definíciókat és a tételeket mind inkább meg kell tudni különböztetni, azokat helyesen kimondani, problémamegoldásban mind többször alkalmazni. A mindennapi élet és a matematika (korosztálynak megfelelő) állításainak igaz vagy hamis voltát el kell tudni dönteni. A feladatok megoldása során fokozatosan kialakul az adatok, feltételek adott feladat megoldásához való szükségessége és elégségessége eldöntésének képessége. A tanítás része, hogy a feladatmegoldás előtt mind gyakrabban tervek, vázlatok készüljenek, majd ezek közül válasszuk ki a legjobbat. Esetenként járunk be több utat a megoldás során, és ennek alapján gondoljuk végig, hogy létezik-e legjobb út, vagy ennek eldöntése csak bizonyos szempontok rögzítése esetén lehetséges. A feladatmegoldások során lehetőséget kell teremteni arra, hogy esetenként a terveket és a munka szervezését a feladatmegoldás közben a tapasztalatoknak megfelelően módosítani lehessen. Egyes feladatok esetén szükséges általánosabb eljárási módokat, algoritmusokat keresni.

A matematika egyes területei más-más módon adnak lehetőséget ebben az életkorban az egyes kompetenciák fejlesztésére. A különböző matematikatanítási módszerek minden tananyagrészen segíthetik a megfelelő önismeret, a helyes énkép kialakítását.

A tananyaghoz kapcsolódó matematikatörténeti érdekességek hozzásegítenek az egyetemes kultúra, a magyar tudománytörténet megismeréséhez. A gyakorlati élethez kapcsolódó szöveges feladatok segítik a gazdasági nevelést, a környezettudatos életvitelt, az egészséges életmód kialakítását. A definíciók megtanulása fejleszti a memóriát, a szaknyelv precíz használatára ösztönöz. A geometriai ismeretek elsajátítása közben a tanulók térszemlélete fejlődik, megtanulják az esztétikus, pontos munkavégzést. A halmazszemlélet alakítása és fejlesztése a rendszerező-képességet erősíti. Az egyes tematikus egységekre javasolt óraszámokat a táblázatok tartalmazzák. Ezenkívül számonkérésre 10 órát és ismétlésre, rendszerezésre 20 órát terveztünk.

A kiegészítő anyagot *szögletes zárójelbe* tettük.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Adott tulajdonságú elemek halmazba rendezése. Halmazba tartozó elemek közös tulajdonságainak felismerése, megnevezése. Annak eldöntése, hogy egy elem beletartozik-e egy adott halmazba.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Ismeretek tudatos memorizálása, felidézése. A megtanulást segítő eszközök és módszerek megismerése, értelmes, interaktív használatának fejlesztése. A rendszerezést segítő eszközök és algoritmusok megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei konkrét számhalmazokon és ponthalmazokon, valamint egyszerű geometriai alakzatokon. Halmaz, elem, részhalmaz; halmazok uniója, metszete, különbsége (konkrét esetekben); szögfelező; szakaszfelező merőleges (síkban és térben); körvonal, körlap, gömbfelület, gömbtest. Halmazok szemléltetése Venn-diagrammon; geometriai alakzatok (pl. négyszögek) osztályozása tulajdonságaik alapján; egész számok osztályozása oszthatósági tulajdonságaik alapján. Egyszerű távolságkorlátozással megadott ponthalmazok megkeresése a síkon és a térben. Műveletek halmazokkal. Részhalmaz: unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz. Ellipszis, parabola, hiperbola mint síkbeli ponthalmazok. A szitaformula a legegyszerűbb esetekben (2 és 3 halmazra). A halmazműveletek használata feladatok megoldásánál. Síkon és térben egyszerűbb távolságkorlátozással megadott ponthalmazok jellemzése (koordináta-rendszerben is). Pl. $x < y$, $x < z$ típusú halmazok jellemzése a térben.		<i>Informatika:</i> könyvtárszerkezet a számítógépen. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szövegértés, szövegértelmezés; lényegkiemelés fejlesztése.
Kulcsfogalmak/fogalmak	Halmaz, elem, részhalmaz; unió, metszet.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	A változás értelmezése egyszerű matematikai tartalmú szövegben. Több, kevesebb, ugyanannyi fogalma. Állítások igazságtartalmának eldöntése. Igaz és hamis állítások megfogalmazása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Szóbeli és írásbeli kifejezőkészség fejlesztése, a matematikai szaknyelv pontos használata. Saját gondolatok megértetésére való törekvés (szóbeli érvelés, szemléletes indoklás).	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Állítások összekapcsolásának értelmezése egyszerű esetekben;		<i>Magyar nyelv és</i>

egyszerűbb következtetések ellenőrzése. $\wedge$, $\vee$, $\neg$ használata rövidítésként. Állítások tagadása, kijelentések közötti „és”, „vagy” kapcsolatok felismerése; egyszerű következtetések helyességének vizsgálata. Összetett állítások elemzése, értelmezése; következtetések; bizonyítások. A „minden” és a „van olyan” kvantorok használata rövidítésként. Összetett állítások tagadása. Ekvivalens állítások szerkezetének elemzése; állítások tagadásának megfogalmazása, értelmezése; a De Morgan-szabályok konkrét esetekben. Olyan példák bemutatása, amikor egy állítás cáfolatához elég egy ellenpélda, olyanoké, amikor az állítás bizonyításához minden esetet végig kell vizsgálni. Példákon keresztül tisztázni a minimum és az alsó becslés közti különbséget. Indirekt bizonyítások konkrét példákon.	<i>irodalom: a lényeges és lényegtelen megkülönböztetése.</i> <i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz; technika, életvitel és gyakorlat: szövegelemzés, értelmezés, lefordítás a matematika nyelvére.</i>
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Állítások, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, „minden”, „van olyan”, állítás bizonyítása, példa, ellenpélda.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 42 óra
Előzetes tudás	Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen. Műveletek racionális számokkal. Osztandó, osztó, hányados. Többszörös fogalma. Alapműveletek racionális számokkal írásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása. Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése. A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Számelméleti ismeretek összefoglalása. Az oszthatóság elemi tulajdonságai az egész számok körében; prímszámok és egyszerű tulajdonságaik; legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös; az egész kitevőjű hatványozás. Természetes számok; egész számok; oszthatóság; prímszámok és összetett számok; l.n.k.o. és l.k.k.t.; négyzet és köbszámok; az egész kitevőjű hatványozás. A normálalak. Oszthatósági szabályok (2-vel, 5-tel, 3-mal, 9-cel, 11-gyel); a számelmélet alaptételének kimondása (bizonyítás nélkül); a hatványozás azonosságai konkrét esetekben. Prímszámok keresése eratoszthenészi szitával; pozitív egész számok		Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz: számításos feladatok. Kémia: az anyagmennyiség mértékegysége (a mól).

prímtényező felbontása és alkalmazása l.n.k.o. és l.k.k.t. meghatározására. Műveletek egész kitevőjű hatványokkal. Egész számok hányadosának átalakítása periodikus tizedes törtté. Tíz-es számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont. Oszthatósági feladatok megoldása a tanult eszközökkel; a hatványazonosságok felhasználása egyszerűbb feladatokban; biztos számolási készség törtekkel; zsebszámológép használata 3 vagy többjegyű számok prímtényező felbontásához, illetve annak eldöntéséhez, hogy az adott szám prím-e. Oszthatósági vizsgálatok; egyszerű számelméleti függvények; a számelméleti fogalmak és módszerek előkészítése feladatokkal. Az osztók száma (a $d(n)$ függvény), a Σ és π jelek használata. Relatív prím számok. $a n$ és $b n$-ből $ab n$ csak relatív prímekre következik, általában $[a,b] n$; valamint: $\sqrt{2}, \sqrt{n}$ irracionális [több bizonyítás]. A prímek száma végtelen. p/q mikor véges, mikor végtelen tizedes tört. Az euklideszi algoritmus alkalmazása két szám l.n.k.o.-jának megkeresésére konkrét esetekben. Műveletek (osztási) maradékokkal. $d(n) = k$ alakú egyenletek megoldása. $ax + by = c$ megoldása konkrét esetekben; konkrét esetekben n alapú számrendszerben $n, n - 1, n + 1$ osztóival való oszthatósági szabályok. Történeti érdekességek a számelmélettel kapcsolatban.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Oszthatóság; prímszám, összetett szám, maradék, euklideszi algoritmus, l.n.k.o. és l.k.k.t, oszthatósági szabály.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 48 óra
Előzetes tudás	Racionális számkör. Számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen. Műveletek racionális számokkal. Ellentett, abszolút érték, reciprok. Mérés, mértékegységek használata, átváltás egyszerű esetekben. A mindennapi életben felmerülő egyszerű arányossági feladatok megoldása következtetéssel, egyenes arányosság. Alapműveletek racionális számokkal írásban. A zárójelek, a műveleti sorrend biztos alkalmazása. Helyes és értelmes kerekítés, az eredmények becslése, a becslés használata ellenőrzésre is. Szöveges feladatok megoldása. A százalékszámítás alapjai.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A matematikai ismeretek és a mindennapi élet történései közötti kapcsolat tudatosítása. Szavakban megfogalmazott helyzet, történet matematizálása; matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz. Konkrét matematikai modellek értelmezése a modellnek megfelelő szöveges feladat alkotásával. A szabványos mértékegységekhez tartozó mennyiségek és	

	többszöröseik, törtreszeik képzeletben való felidézése. Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása. Az ellenőrzés, önellenőrzés iránti igény, az eredményért való felelősségvállalás erősítése.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Az algebrai ismeretek ismételése; a betűk célszerű használatának, az algebrai kifejezésekkel való számolás gyakorlása egyszerű azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában. Egyenes és fordított arányosság; százalékláb, százaléktértek. Mérlegelv. Zárójelfelbontás, disztributivitás, $(ab)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a \pm b)^2$ átalakítása. Út-idő-sebesség összefüggések. Számolás algebrai egész kifejezésekkel: zárójelfelbontás, disztributivitás, összevonás; egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel. Szöveggel megadott egyszerűbb feladatok lefordítása az algebra nyelvére, egyenletek felállítás. Arányossággal és százalékszámítással, algebrai átalakításokkal megoldható szöveges feladatok. Egyszerűbb keverési feladatok, mozgásos feladatok. Egyszerű nevezetes algebrai azonosságok. A biztos algebrai készség megalapozása. A számfogalom bővítése. Teljes négyzet. Teljes köb. Nevezetes azonosságok, szorzattá alakítás és ennek szerepe egyenletek megoldásában. A négyzetgyök fogalma, irracionális számok, két szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepe. $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^3 + b^3$ szorzattá alakítása; teljes négyzet és teljes köb. A hatványozás azonosságai egész kitevőre; a négyzetgyökvonás azonosságai. A megismert közepek közti egyenlőtlenségek. Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása; teljes négyzet és köb felismerése; a megismert azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban, az egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték feladatokban, lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. 9-cel, 11-gyel való oszthatósági szabály bizonyítása; $x + 1/x \geq 2$, ha $x > 0$; szöveges szélsőérték-feladatok megoldása a tanult egyenlőtlenségekkel; az x^2, $1/x$ ($x > 0$), $\sqrt{x}$ függvények gyenge konvexitásának bizonyítása.	<i>Fizika:</i> összefüggések megfogalmazása, leírása a matematika nyelvén. <i>Fizika; kémia; biológia-egészségtan; földrajz:</i> számításos feladatok. <i>Kémia:</i> az anyagmennyiség mértékegysége (a mól). <i>Földrajz:</i> termelési statisztikai adatok.
Kulcsfogalmak/fogalmak	Egyenes és fordított arányosság; százalékláb, százaléktértek. Mérlegelv. Algebrai átalakítás, négyzetgyök, nevezetes algebrai azonosság, teljes négyzet. Egyenlet, egyenlőtlenség.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 58 óra
Előzetes tudás	Pont, vonal, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, szögtartomány. Háromszögek, csoportosításuk. Négyszögek, speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, deltoid). Kör és részei. Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok. Háromszög, négyszög belső és külső szögeinek összegére vonatkozó ismeretek. Téglatest tulajdonságai. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok. Egyszerű alakzatok tengelyes tükröképének megszerkesztése. Két pont, pont és egyenes távolsága, két egyenes távolsága. Szakaszfelezés, szögfelezés, szögmásolás. Merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése. Nevezetes szögek szerkesztése. Szerkesztési eszközök használata. Koordináta-rendszer megismerése, pont ábrázolása, adott pont koordinátáinak a leolvasása. A téglalap és a deltoid területének és területének kiszámítása. A téglatest felszínének és térfogatának a kiszámítása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Rendszerező készség fejlesztése. A mindennapi élethez kapcsolódó egyszerű geometriai számítások elvégzésének fejlesztése. A gyakorlatban előforduló geometriai ismereteket igénylő problémák megoldására való képesség fejlesztése. Statikus helyzetek, képek, tárgyak megfigyelése. Geometriai transzformációkban megfigyelt megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. Képzeletben történő mozgatás: átdarabolás elképzelése, testháló összehajtásának, szétvágásának elképzelése. A pontos munkavégzés igényének fejlesztése. A problémamegoldás lépéseinek megismertetése (szerkesztésnél: vázlatrajz, adatfelvétel, a szerkesztés menete, szerkesztés, diszkusszió). Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása; kezdeményezőkészség, együttműködési készség, tolerancia.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A geometria tanult fogalmainak átismétlése, első ismerkedés az egybevágósági transzformációkkal és a középpontos hasonlósággal. A háromszög és a sokszög szögei. Pont, egyenes, sík, tér, párhuzamosság, merőlegesség; a szög, háromszög és sokszög külső és belső szögei; háromszögek egybevágósága; a kör, középpontja, sugara, átmérője, húrja, érintője, szelője; a háromszög köré írt kör, a háromszögbe írt kör. Téglalap, háromszög, paralelogramma területe. Tengelyes és középpontos tükrözés, forgatás, eltolás; konkrét alakzatok középpontos kicsinyítése, nagyítása. A szakaszfelező merőleges (egyenes, ill. sík) mint ponthalmaz (mértani hely); egyszerű tengelyesen szimmetrikus alakzatok		<i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> a hétköznapi problémák területtel kapcsolatos számításai (lefedések, szabászat, földmérés); műszaki rajz készítése. <i>Vizuális kultúra:</i> Pantheon, Colosseum. Művészeti alkotások megfigyelése a tanult transzformációk

(egyenlőszárú háromszög, szabályos sokszögek szimmetriatengelyei, kör és gömb szimmetriatengelyei, ill. síkjai); a szögfelezők mint ponthalmazok (mértani helyek). A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást. Háromszög és konvex sokszög szögeinek összege, külső szögeinek összege. Téglalap, háromszög, paralelogramma területe. Pitagorasz tétele (területekkel); konvex érintőnéyszögek szemközti oldalainak összege egyenlő. Thalész tétele. A körző és vonalzó biztos használata. Konkrét alakzatok tükrözése (egyenest, pontot), eltolása, elforgatása, középpontos kicsinyítése, nagyítása; ezzel kapcsolatos egyszerű feladatok. Kerület, terület, felszín, térfogat kiszámítása (sokszögek kerülete, háromszög, négyszög területe, kocka, téglalap, egyenes hasáb felszíne, térfogata). Egyszerű szerkesztési és bizonyítási feladatok a tanult transzformációk alkalmazására, pl. egyszerű geometriai szélsőérték feladatok (pl. legrövidebb út keresése); egybevágósági feladatok; háromszög- és négyszögszerkesztési feladatok; mértani helyes szerkesztési feladatok; Pitagorasz tétellel kiszámolható feladatok. Az egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik; az elemi síkgeometria továbbépítése. Párhuzamos szelők tétele egész arányra [és racionális arányra]; középpontos hasonlóság egész arányra. Háromszög és tetraéder nevezetes pontjai. A háromszöghöz írt érintő körök; háromszög és négyszög középvonala, a háromszög magasságpontja, súlypontja. Tetraéder súlypontja, köréírt és beírt gömbje [hozzáírt gömbjei]. Paralelepipedon. Csúsztatva tükrözés. Tételek szöge. Euler-egyenest.	segítségével. Festmények, művészeti alkotások egybevágó geometriai alakzatai. <i>Magyar nyelv és irodalom:</i> szabatos fogalmazás. <i>Vizuális kultúra; biológia-egészségtan:</i> középpontosan szimmetrikus alakzatok megfigyelése, vizsgálata a természetben és a műalkotásokban. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> Pitagorasz és kora.
Háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. A háromszög két külső szögfelezője és egy belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. A háromszög középvonalára, súlypontjára és magasságpontjára vonatkozó tétel; az Euler-egyenest egyszerű tulajdonságai. A tetraédernek van súlypontja, köréírt, be- és hozzáírt gömbje; példa olyan tetraéderre, amelynek nincs magasságpontja. Háromszög hasonlóságainak alapesetei (bizonyítás nélkül!). Egybevágósági transzformációk és a megismert fogalmak, tételek alkalmazása egyszerű szerkesztési feladatokban; síkbeli és térbeli számítási feladatokban. Szerkesztések diszkussziója (hány megoldás van, van-e mindig megoldás). Két kör közös érintője, adott kört és egyenest érintő kör szerkesztése; korlátozott eszközökkel való szerkesztés (pl. „rozsdás körző” vagy tócsa miatt elérhetetlen pont van, vagy a lépésszám van korlátozva). Példák arra, hogy a szerkesztési eljárás – „rosszul megadott” adatok mellett - nem a kívánt eredményre vezet, pl. beírt kör sugara, β, b. További szögszámolási feladatok és más, pl. a Pitagorasz-tételt használó számolási feladatok.	<i>Vizuális kultúra; biológia-egészségtan:</i> középpontosan szimmetrikus alakzatok megfigyelése, vizsgálata a természetben és a műalkotásokban. <i>Vizuális kultúra:</i> festmények, művészeti alkotások egybevágó geometriai alakzatai. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> Pitagorasz és kora.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Geometriai transzformáció, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés,

	eltolás. Vektor. Egybevágóság. Középpontos szimmetria, paralelogramma, rombusz. Egyállású szög, váltószög, csúcsszög. Belső és külső. Hasáb, henger, gúla, kúp, gömb. Alaplap, alapél, oldallap, oldalél. Pont, egyenes szakasz, sík, tér, test, alakzat. Sokszög, kör. Érintő, szelő, húr, sugár, átmérő. Háromszög, középvonal, súlyvonal, súlypont, magasság, magasságpont, szögfelező. A háromszög nevezetes körei. Szerkesztés. Egybevágóság, hasonlóság, alakzatok egybevágósága.
--	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Analitikus geometria	Órakeret 24 óra
Előzetes tudás	Koordináta-rendszer megismerése, pont ábrázolása, adott pont koordinátáinak a leolvasása. Pont, egyenes, metszés. Műveletek racionális számokkal. Ellentett, abszolút érték, reciprok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az együttműködéshez szükséges képességek fejlesztése páros és kis csoportos tevékenykedtetés, feladatmegoldás során – a munka tervezése, szervezése, megosztása; kezdeményezőkétség, együttműködési készség, tolerancia. A pontos munkavégzés igényének fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Első ismerkedés a derékszögű koordináta-rendszerrel; egyenesek ábrázolása. Derékszögű koordináta-rendszer, origó, abszcissza, ordináta. Helyvektor, vektor (szemléletesen). Kapcsolat az egyenes és a lineáris kétismeretlenes egyenlet között. Felezőpont koordinátái. Kicsinyítés és nagyítás az origóból, más pontokból (konkrét alakzatok, konkrét példák). koordinátaival adott pontok ábrázolása; helyvektor, egyenes ábrázolása. Egyszerű pontthalmazok meghatározása. Pl. $x + y \leq 1$; $x > y$; $1 < x - y < 2$ típusú feltételekkel megadott halmazok ábrázolása. Vektorokkal végzett alaplóműveletek és alkalmazásaik. Vektorok összeadása, kivonása, számmal való szorzása, legfeljebb négy pontból álló pontrendszer súlypontja. A súlypontba mutató vektor koordinátái. Vektor felbontása adott irányú összetevőkre. Vektorok összeadására és kivonására vonatkozó alapazonosságok. Síkvektor egyértelmű felbonthatósága két nem párhuzamos irányú vektor összegére; térvektorok egyértelmű felbonthatósága három, nem egy síkban lévő vektorral párhuzamos vektor összegére.		<i>Földrajz:</i> tájékozódás a térképen, a Földön; szélességi körök és hosszúsági fokok. <i>Biológia-egészségtan:</i> mikroszkóp. <i>Vizuális kultúra:</i> valós tárgyak arányosan kicsinyített vagy nagyított rajza. <i>Fizika:</i> az erő fogalma, felbontása, erők összege, különbsége.

Számolás vektorokkal; a vektorműveletek és a koordináták kapcsolata, vektor 90°-kal való elforgatottjának koordinátái; vektorok alkalmazása egyszerű bizonyítási és számítási feladatokban. Vektorok és vektorműveletek a fizikában.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Derékszögű koordináta-rendszer, origó, abszcissza, ordináta. Egyenes ábrázolása. Vektor.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények	Órakeret 48 óra
Előzetes tudás	Helymeghatározás gyakorlati szituációkban, konkrét esetekben. Számegyenes, számintervallumok ábrázolása, leolvasása ábráról. Pont koordinátáinak ismerete Descartes-féle koordináta-rendszerben. Sorozatok folytatása adott szabály szerint, szabályfelismerés.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Függvény-transzformációk algebrai és geometriai megjelenítése. Összefüggések, folyamatok megjelenítése matematikai formában (függvénytmodell), vizsgálat a grafikon alapján. A vizsgálat szempontjainak kialakítása. Számítógép bevonása a függvények ábrázolásába, vizsgálatába.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A függvényfogalom megalapozása egyszerű példák alapján; egyszerűbb függvények ábrázolása és alkalmazása egyenletek és egyenlőtlenségek megoldására. Hozzárendelés; értelmezési tartomány; képhalmaz; értékkészlet; a lineáris függvény, az abszolútérték-függvény, az $f(x) \rightarrow \frac{1}{x} + b$, $x \neq 0$ függvény. Adott függvények ábrázolása a derékszögű koordináta-rendszerben; egyszerűbb egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása, a megoldások ábrázolása a számegyenesen. Egyenlőtlenségek; szöveges feladatok grafikus megoldása. További konkrét függvények vizsgálata, a függvénytranszformáció előkészítése és alkalmazása szélsőérték feladatok, egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldására. Az analízis egyszerű alapfogalmainak előkészítése konkrét feladatokon és szemléltetése példákkal. $x \rightarrow (x + b)^2 + c$, $x \rightarrow [x]$, $x \rightarrow \{x\}$, $x \rightarrow \operatorname{sgn} x$, $x \rightarrow (ax + b)/(cx + d)$ függvények értelmezése, vizsgálata, beleértve a lineáris törtfüggvény átalakítását is. A valós szám szemléletes fogalma. Függvényvizsgálat konkrét példákon. A megismert függvények (például $x \rightarrow x$, $x \rightarrow [x]$, $x \rightarrow \{x\}$, $x \rightarrow \operatorname{sgn}(x)$) szakadási helyei; hol van csúcsa egy abszolútérték-függvény grafikonjának, illetve két, három ilyen függvény		<i>Fizika; biológia-egészségtan; kémia; földrajz:</i> függvényekkel leírható folyamatok. <i>Informatika:</i> Tantárgyi szimulációs programok használata. Számítógépes program az ábrázoláshoz. <i>Fizika:</i> A sebesség és az út-idő grafikon kapcsolata; az ellenállás és a feszültség-áramerősség grafikon kapcsolata. A gyorsuló mozgás út-idő grafikonja. Adott távolság esetén a sebesség és az idő, adott tömeg esetén a sűrűség és a térfogat. <i>Technika, életvitel és</i>

összegéből kapott függvény grafikonjának; konkrét függvény paritása, korlátossága, szélsőértéke, periodikussága, konvexitása. A valós számok szemléletes fogalma. A megismert függvények egyszerű, konkrét esetekben történő transzformációival egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Szélsőérték-feladatok megoldása az $x \rightarrow (x + b)^2 + c$ alakú függvény vizsgálatával. A függvényfogalom elmélyítése a természettudományos tantárgyakból vett példákon; $[x] x = a$, $(x + b)^2 = a$ típusú egyenletek megoldása. Egyszerű kémiai, fizikai, földrajzi példák függvényekre, ezek szemléltetése. A fizikából és kémiából vett konkrét függvények vizsgálata, szöveges feladatok megoldása.		<i>gyakorlat:</i> valós folyamatok a mindennapi életben. <i>Biológia-egészségtan; fizika; kémia:</i> mérési eredmények kiértékelése grafikonok alapján.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Függvény. Értelmezési tartomány, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás, értékkészlet. Lineáris függvény, lineáris kapcsolat, meredekség. Abszolútérték-függvény, másodfokú függvény. Függvény grafikonja. Paritás, korlátosság.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 24 óra
Előzetes tudás	Elemek sorba rendezése, adott szempont szerinti kiválasztása, gráf használata egyszerű leszámolási feladatokban. Összeszámlálás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A kombinatorikai problémák felfedezése a hétköznapi életben, modellek alkalmazása. A rendszerező képesség, a figyelem fejlesztése. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A „hozott” kombinatorikai ismeretek rendszerezése: összeszámlálás, skatulyaelv, szöveges feladatok. Permutáció, $n!$ ($n > 0$, n egész). A skatulyaelv. Leszámolás fagráfokkal. Sokszög átlóinak a száma; n egyenes hány részre osztja a síkot (konkrét n-ekre), $\binom{n}{k}$; permutációk száma. Véges halmaz részhalmazainak száma. A Pascal-háromszög legegyszerűbb tulajdonságai. [Pascal-háromszög sorösszege.] A Fibonacci-sorozat legegyszerűbb tulajdonságai. Leszámolási feladatok megoldása pl. fagráf segítségével; tudatos leszámolási módszerek kialakítása. Bonyolultabb skatulyaelves feladatok; leszámolási feladatok;		<i>Biológia-egészségtan:</i> genetika.

egyszerű feladatok, ahol pl. a sakktábla színezése segít; az állapotfüggvényt előkészítő egyszerű feladatok: invarianciával (pl. négyes maradék megmaradásával) bizonyítható feladatok; vegyes feladatok (pl. sakktáblán). A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése. A teljes indukció előkészítése. Ismétléses permutáció, kombináció. $\binom{n}{k}$ kapcsolata a Pascal-háromszöggel. Pascal-háromszög tulajdonságai (folytatás); véges halmaz részhalmazainak, páros és páratlan elemszámú részhalmazainak száma (újabb bizonyítások). A logikai szita 2, 3 halmazra. Egyszerű minimum- és maximumkereső feladatok. $\binom{n}{k}$ kiszámítása. Kombináció. Fibonacci-sorozat tulajdonságainak kombinatorikus bizonyítása. „Könyvtárfeladat”: páronként nemdiszjunkt intervallumoknak van közös pontja. Egyszerű kombinatorikai játékok. $\binom{n}{k}$ felhasználása feladatokban. Egyszerű feladatok teljes indukcióra. További feladatok a skatulyaelvre. Bonyolultabb leszámolási, színezési feladatok. Olyan (pl. kombinatorikus geometriai) feladatok, amelyeknek megoldásánál hivatkozni kell arra, hogy végtelen sok lehetőség közül egy véges halmaz csak véges sok lehetőséget zár ki; vagy azt kell kihasználni, hogy valami egyesével változik (mindkettőre példa: mindig húzható olyan egyenes, amelynek két oldalán n-n darab van adott $2n$ pont közül). $\varphi(n)$ kiszámolása a szitaformulával konkrét $n = pq$, $n = pqr$, $n = p^2$, $n = p^2q$ alakú számokra [és általában]. Az állapotfüggvényt előkészítő további feladatok.	
Kulcsfogalmak/fogalmak	Leszámlálás, teljes indukció, permutáció, skatulyaelv, Pascal-háromszög, halmaz és részhalmaz, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, logikai szita, kombinatorikai játék, színezés.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Sorba rendezési és kiválasztási feladatok, gráf használata feladatmegoldásban.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban. Gráfok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A gráfelmélet egyszerű alapfogalmai és a gráfok felhasználása feladatmegoldásokban.		Több tantárgy: fogalmi rendszerezéséhez

Gráf, csúcs, él, pont foka száma, fa konkrét feladatokban. Euler-kör és -út konkrét feladatokban. Fokszámok összege páros; Euler-kör és -út létezésének feltétele (feladatokon keresztül). Permutációk ábrázolása gráffal; osztók fája; részhalmazok ábrázolása bináris fákkal; leszámolási feladatok megoldása fákkal. Ismeretségre, rokonságra vonatkozó (tehát gráffal szemléltethető) egyszerű feladatok. Egyszerű Ramsey-típusú feladatok konkrét, kis számokra (pl. ha egy 6 tagú társaság bármely 3 tagja közül van 2, aki ismeri egymást, akkor van a társaságban hármas ismeretség). Euler-kör és -út. Az alapfogalmak bővítése, új fogalmak előkészítése. Euler-vonal (kör és út). Út, kör, összefüggő gráf, fa és faváz fogalma konkrét feladatokon keresztül. Irányított gráf és [turnament (körmérkőzés)] fogalma konkrét feladatokon keresztül. A komplementer gráf. Páros gráf és páros körüljárású gráf. Ramsey-típusú tételek egyszerű esetekben (folytatás: pl. ha egy 9 tagú társaság bármely 3 tagja közül van 2, aki ismeri egymást, akkor van négyes ismeretség). (Példák, ahol a mohó algoritmus működik.) Euler-kör és -út létezésének szükséges és elégséges feltétele. Ha minden pont foka $\leq k$, akkor van k pontú út és kör. Páros körüljárású gráf színezhető két színnel. [Turnamentben van pszeudogyőztes (példa „tekintsük a legnagyobbat” típusú bizonyításra).] Adott gráfokban megfelelő tulajdonságú utat, kört, sétát (pl. Euler-utat, kört) keresni, [favázat keresni]; adott gráfról eldönteni, hogy összefüggő-e.		használhatók pl. a fagráfok. <i>Kémia:</i> szénhidrogénekben hidrogének számának paritása.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Fagráf, körgráf, egyszerű gráf, összefüggő gráf, teljes gráf. Fokszám. Euler-kör és út. Irányított gráf, turnament. Páros gráf. Ramsey-típusú tétel.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 10 óra
Előzetes tudás	Egyszerűbb matematikai játékok kapcsán stratégia, nyerő helyzet, lépésszám fogalmának ismerete.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algoritmusok a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban, játékokban. Algoritmusok segédeszközként való használata a gondolkodásban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Ismerkedés az algoritmusokkal, elsősorban konkrét matematikai játékokon és keresési feladatokon keresztül. „Biztosan nyerünk”, „adott lépésszám mellett biztosan találunk”; „nyerő helyzet”, „vesztő helyzet” fogalmának kialakítása konkrét játékok példáján keresztül; a „legrosszabb eset” jelentése (konkrét		<i>Informatika:</i> programozási nyelvek.

példákon). Mit jelent a „kérdés” a keresési feladatokban (a kérdezett halmazt nem kell pl. szemléletileg jellemezni). Játékok szimmetriája konkrét, egyszerű példákon. (Egyszerű invarianciaelves feladatok.) n elemű halmazból adott szám kiválasztása minimális kérdéssel. Egyszerű, szimmetrián alapuló játékok elemzése; mérések számának minimalizálásával kapcsolatos feladatok. A lehetséges „kérdések” tisztázása. Pl. 1-től 40 grammig minden egész grammot mérni akarunk egy kétkarú mérlegen. Milyen súlyokat válasszunk, hogy a lehető legkevesebb számú súlyra legyen szükség. További játékalgoritmusok, kiválasztási és rendezési algoritmusok. Kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája, „nyerő” és „vesztő” helyek konkrét játékoknál. A „mohó algoritmus” fogalma konkrét példákon (mikor jogos, mikor nem). Állapotfüggvény előkészítése konkrét példákon. n elemű rendezett halmaz legnagyobb, legkisebb elemének kiválasztása $n-1$ összehasonlítással. n elemű halmaz rendezése összefűzéssel, beszúrással. Konkrét egyszerű példák, amikor a „mohó algoritmus” nem működik. Hanoi tornyai; palacsintaforogtatás (rendezni úgy, hogy mindig egy adott szeletet forgathatok); 3, 4, [5] elem rendezése minimális összehasonlítással. Kétszemélyes játékok (nyerő, vesztő helyzeteinek) elemzése. Számítástechnikából ismert algoritmusok matematikai „vizsgálata”.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Algoritmus. Nyerő stratégia. Kétszemélyes determinisztikus játék.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 20 óra
Előzetes tudás	Valószínűségi kísérletek elvégzése, elemzése. Táblázatok, diagramok olvasása. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A világ megismerése iránti igény erősítése. Valószínűségi, statisztikai szemlélet fejlesztése. Gyakorlottság növelése adatok rendszerezésében, kezelésében. Tapasztalatszerzés újabb kísérletekkel, kiértékelés, következtetések. Diagram készítése, olvasása. Együttműködés képességének fejlesztése. Táblázat értelmezése, számítógépes táblázatkezelő használata az adatok rendezésében, értékelésében. Az esély és a relatív gyakoriság fogalmának kialakítása.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Első ismerkedés a valószínűség fogalmával; egyszerű kísérletek, játékok elemzése kapcsán. Statisztikai adatok lejegyzése, grafikonok olvasása. A valószínűség szemléletes fogalma. Kísérletek eredményének megfigyelése, az adatok lejegyzése és értékelése; egyszerű, például kockadobással kapcsolatos játékok elemzése. A kísérleti adatok szemléltetése grafikonon. A kombinatorikus módszerekkel megoldható konkrét valószínűség-számítási feladatok egyszerű esetei. Átlag, medián, módusz. Események; lehetetlen, biztos esemény; komplementer esemény. Műveletek események között (szemléletesen). Gyakoriság, relatív gyakoriság. n szám mediánja, átlaga. A valószínűség intuitív fogalmának megvilágítása „meglepő” végeredményű, egyszerű feladatokkal (pl. három korong). n szám mediánjának meghatározása. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ konkrét feladatokban. Valószínűségi feladatok megoldása komplementer esemény valószínűségének kiszámolásával (pl. mennyi a valószínűsége, hogy egy autórendszámban szerepel 1-es). „Meglepő” eredményű feladatok (pl. minek nagyobb a valószínűsége, hogy 7-et vagy hogy 6-ot dobunk két kockával; három korong stb.). Kockadobással, pénzdobással kapcsolatos egyszerű események valószínűségének meghatározása összeszámlálással, fagráf segítségével. Egyszerű statisztikai adatok elemzése, következtetések megfogalmazása (pl. betűstatisztika).	<i>Informatika:</i> az adatok ábrázolására alkalmas program; statisztikai adatelemzés. <i>Biológia-egészségtan:</i> genetika. <i>Földrajz:</i> statisztikai adatok jellemzése (átlagos népsűrűség, országok különböző szempont szerinti rangsorai); statisztikai évkönyv. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> választások.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Adatsokaság, diagram, módusz, medián, átlag. Gyakoriság, relatív gyakoriság, esély. Valószínűségi feladat, komplementer esemény. Kockadobás, pénzfeldobás.

A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<i>Halmazok</i> – Halmazok szemléltetése Venn-diagramon. – Műveletek halmazokkal. – Ponthalmazok ismerete. – Szitaformula a legegyszerűbb esetekben. <i>Logika</i> – Állítások összekapcsolásának értelmezése.
---	---

	– „Minden” és „van olyan” kvantorok használata. – Ekvivalens állítások szerkezetének elemzése. – Indirekt bizonyítások konkrét példák. – ellenpélda, az összes eset vizsgálata. <i>Számelmélet</i> – Oszthatóság; prímszámok és összetett számok ismerete. – Oszthatósági szabályok használata. – Pozitív egész számok prímtényező felbontása és alkalmazása. – Oszthatósági vizsgálatok végzése. – Egyszerű számelméleti függvények ismerete. – Az euklideszi algoritmus alkalmazása. – Műveletek (osztási) maradékokkal. <i>Algebra</i> – Számolás algebrai egész kifejezésekkel. – Szöveges feladatok megoldása. – Nevezetes algebrai azonosságok használata. – Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása. – Lineáris egyenletrendszerek megoldása. <i>Geometria</i> – Háromszög nevezetes vonalainak ismerete. – Thalész-tétel ismerete. – Síkidomok területének számolása. – Egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik. – A háromszög nevezetes köreinek ismerete. – Körök érintői, közös érintők ismerete. <i>Analitikus geometria</i> – derékszögű koordináta-rendszer, origó, abszcissa, ordináta ismerete. – helyvektor, vektor (szemléletesen). – vektorokkal végzett alapműveletek és alkalmazásaik. – vektorok alkalmazása egyszerű bizonyítási és számítási feladatokban. – vektorok és vektorműveletek a fizikában. <i>Függvények</i> – Függvények jellemzése: Értelmezési tartomány, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás, értékkészlet. – Lineáris függvények, lineáris kapcsolatok, meredekség ismerete. – Abszolútérték-függvények, másodfokú függvények ismerete. – Függvény grafikonjának ábrázolása. – Paritás, korlátosság meghatározása. <i>Kombinatorika</i> – Leszámlálások végzése.
--	---

	– Teljes indukció alkalmazása különböző bizonyítások kapcsán. – Permutáció, -skatulyaelv ismerete. – Pascal-háromszög ismerete, halmazok és részhalmazaik megadása, számuk meghatározása. – Logikai szita ismerete és alkalmazása. – Egyszerű kombinatorikai játékok ismerete. – Színezések alkalmazása. <i>Gráfok</i> – Fagráf, körgráf, egyszerű gráf, összefüggő gráf, teljes gráf fogalmának ismerete. – Fokszám meghatározása. – Euler-kör és út fogalma, keresése. – Irányított gráf, tournament fogalma konkrét feledatokon keresztül. – Páros gráfok ismerete. – Ramsey-típusú tételek kimondása, alkalmazása egyszerű esetekben. <i>Algoritmusok</i> – Algoritmusok ismerete. – Nyerő stratégia fogalma, megadása konkrét játékok kapcsán. – Kétszemélyes determinisztikus játékok kipróbálása, megismerése. – Informatikából ismert algoritmusok matematika elemzése. <i>Valószínűség-számítás, statisztika</i> – Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében. – A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módjának alkalmazása. – Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása. – Adatsokaság ábrázolása diagramon, módusz, medián, átlag kiszámítása. – Gyakoriság, relatív gyakoriság, esély fogalmának ismerete. – Valószínűségi feladatok megoldása, komplementer esemény fogalmának ismerete. – Kockadobás, pénzfeldobás - feladatmegoldás.
--	---

9-10. évfolyam

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Csoportosítás különböző szempontok alapján. Halmazműveletek véges halmazokon. Halmazábra. Részhalmaz. Számhalmazok, ponthalmazok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A halmaz fogalmának mélyítése, alkalmazása problémamegoldásra. Ismerkedés a végtelen halmazokkal, a halmazműveletek tulajdonságaival, a halmazalgebrával. Több szempont alkalmazásával a megosztott figyelem fejlesztése. Definíciók, jelölések használata során	

	az emlékezet fejlesztése.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Korábbi ismeretek felhasználása, a tanult jelölések alkalmazása, felfrissítése. Halmaz megadási módjai, egy elem csak egyszer szerepel egy halmazban. Halmazok azonossága, üres halmaz, n elemű halmaz részhalmazainak a száma.	<i>Informatika:</i> adatbázis-kezelés, adatállományok, adatok szűrése különböző szempontok szerint.
Halmazok számossága. Véges és végtelen halmazok, megszámlálható, nem megszámlálható halmazok. „Tetszőlegesen sok” és „végtelen sok” közti különbség. A megszámlálhatóan végtelen. Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. A valós számok halmaza nem megszámlálható. Az n -edfokú egész-, racionális együtthatós polinomok stb. halmaza megszámlálható. A tetszőlegesen nagy és végtelen közti különbségtétel elsajátítása. Példák adott tulajdonságú tetszőlegesen nagy részhalmazra, amikor van és amikor nincs ugyanilyen tulajdonságú végtelen részhalmaz. (Pl. van tetszőlegesen nagy „hézag” a prímek közt, de végtelen nagy hézag nem lehet. Másrészt: nemcsak tetszőlegesen sok, hanem végtelen sok prím van. Van tetszőlegesen nagy egész, de nincs végtelen nagy stb.) <i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor. Russel-paradoxon.	<i>Magyar nyelv és irodalom:</i> mondatok, szavak, hangok rendszerezése. <i>Filozófia:</i> végtelen.
Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz. Tulajdonságaik: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Halmazműveletek alkalmazása több halmazra. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.	<i>Biológia-egészségtan:</i> rendszertan.
Sík, tér rácpontjai megszámlálhatóan végtelen halmazt alkotnak. A sík, a tér rácpontjainak explicit megszámozása. Nevezetes ponthalmazok: – adott térelemről adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben; – két térelemről egyenlő távol lévő pontok halmaza – síkban és térben. Vegyes feladatok ponthalmazok és halmazműveletek alkalmazására szerkesztéssel is. Ponthalmazok a koordinátasíkon. <i>Matematikatörténet:</i> René Descartes.	<i>Informatika:</i> geometriai szerkesztőprogram, pl. Geogebra, Cabri.
Halmazok ekvivalenciája. A természetes számokkal, ill. a valós számokkal ekvivalens halmazok. A valós számok halmaza nem megszámlálható. A valós számok halmazának és irracionális számok halmazának ekvivalenciája. A megszámlálható és a kontinuumszámosság. Egyenes, szakasz (nyílt és zárt), körvonal pontjainak halmaza, körlemez és négyzet, háromszög és négyzet stb., gömbfelület és sík	

stb. poliéder és gömb stb. pontjainak halmaza között egy-egyértelmű leképezés van. Valós számok és végtelen hosszú 0-1 sorozatok ekvivalenciája. Sík és egyenes ekvivalenciája [a bizonyítás fakultatív] és ennek következményei: n -dimenziós tér, n -edfokú polinomok, komplex számok stb. és valós számok ekvivalenciája. További lehetőségek: Az algebrai számok halmaza megszámlálható. A transzcendens valós számoké kontinuum. A Cantor-halmaz számossága és „szerkezetének” vizsgálata.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Véges és végtelen halmaz, unió, metszet, különbség, szimmetrikus differencia, komplementerhalmaz, ekvivalencia, alef-null és kontinuumszámosság.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Állítások megfogalmazása a hétköznapi életből. Matematikai állítások vizsgálata. Igaz és hamis állítások. Állítás tagadása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A köznapi életben használt logikai következtetések és a matematikai logikában használt kifejezések összevetése. Matematikai állítások helyes megfogalmazása, érvelés, bizonyítási készség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Az állítás fogalmának pontosabb elemzése, állítás és megfordítása. Az állítás fogalmának kialakítása változatos példákon, a fogalom pontos kialakítása (pl. nem személyfüggő, a „mondat” és az „állítás” különbsége). Egyszerűbb matematikai állítások logikai elemzése. A logikai műveletek különböző alkalmazásai. Direkt, indirekt bizonyítás. Szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel. Relációk, ekvivalencia relációk, rendezési relációk.		<i>Filozófia</i> : tézis, antitézis, szintézis.
Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik: igazságtáblázataik (az összes művelet értelmezése, kifejezhetőségek vizsgálata); a műveleti azonosságok. A kétváltozós logikai műveletek azonosságainak igazolása (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, De Morgan-azonosságok stb.). A műveleti azonosságok alkalmazása a műveletek egymással való kifejezésére. A halmazműveletek és a logikai műveletek összefüggése. A számítógépek és a logika kapcsolata. [Logikai áramkörök; például összeadó egység tervezése (kettes számrendszerben) „és” kapukból, „vagy” kapukból és inverterekből. Áramkörök egyszerűsítése az ismert azonosságok felhasználásával.]		<i>Magyar nyelv és irodalom</i> : retorikai alapismeretek.
Boole-algebra. Normálformák és alkalmazásaik. Az igazságfüggvények; konjunktív és diszjunktív normálformák; [teljes függvényrendszerek]. Bármely igazságfüggvény kifejezhető akár konjunktív, akár diszjunktív normálformával. [A teljes függvényrendszerek szükséges és elégséges feltétele (alapgondolat), a kijelentés-kalkulus, a		

halmazalgebra és a négyzetmentes szám osztóinak algebrája izomorf.] [A két- és háromváltozós igazságfüggvények szemléltetése a koordináta-rendszerben. Kétváltozós relációk szemléltetése irányított gráfokkal.] <i>Matematikatörténet:</i> Neumann János.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Logikai művelet, Boole-algebra.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 45 óra
Előzetes tudás	Osztó, többszörös, prímszám, prímtényező felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Prímek, euklideszi algoritmus, kongruenciák és maradékosztályok, a kapcsolódó tételek megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Periodikus tizedestörtek átalakítása két egész szám hányadosává. A teljes indukció gyakorlása oszthatósági feladatokban. Prímek eloszlása, prímekkel kapcsolatos tételek. pl. a szomszédos prímek között tetszőlegesen nagy hézag van, Wilson-tétel, végtelen sok $4k - 1$ és $6k - 1$ alakú prím van [Csebisev, Dirichlet]. Mersenne- és Fermat-prímek. Sejtések, pl. Goldbach-sejtés. Az euklideszi algoritmussal előállítható a legnagyobb közös osztó. Lineáris kétismeretlenes diofantikus egyenlet megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele. A kongruencia alaptulajdonságai (a kongruenciával való „számolási szabályok”), maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszer. Lineáris egyismeretlenes kongruenciák megoldási algoritmusai. Számolás maradékosztályokkal, Euler-Fermat-tétel. A maradékosztályok gyűrűje [a gyűrű fogalma]. Konkrét modulusok esetén annak eldöntése, hogy melyik maradékosztálynak van multiplikatív inverze; hogy egy adott maradékosztály gyűrűtest-e. Nem prímmodulus esetén van nullosztó. Egész együtthatós polinomok racionális gyökeire vonatkozó szükséges feltétel.		<i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> babiloni, egyiptomi, görög antik tudományos központok.
A rácsgéometria elemei. Paralelogramma rács; háromszögrács; rácsegyenes, rácspont, rácsháromszög, üres rácsháromszög. [Pick-tétel.] Tetszőlegesen nagy oldalú üres rácsháromszögek létezése. [Négyzetrácsban négyzeteken kívül nincs szabályos sokszög. Bármely egyeneshez tetszőlegesen közel van rácspont. A diofantikus approximáció elemei.] Számelméleti függvények: δ és φ függvény; [multiplikatív és additív számelméleti függvények]. A páros tökéletes számok. [A pitagoraszai számhármak előállítása.] Módszerek nem diofantikus egyenletek és más számelméleti		

feladatok megoldására (pl. becslés; relatív prímtenyezők szétválasztása; descente infine; kombinatorikus módszerek stb.). Elsősorban konkrét feladatmegoldásokban célszerű tárgyalni a különböző módszereket. <i>Matematikatörténet:</i> Eukleidész, Eratoszthenész, Euler, Fermat, Mersenne.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Prím, kongruencia, maradékosztály, gyűrű.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Aritmetika és algebra	Órakeret 60 óra
Előzetes tudás	Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Azonosság. Szöveges feladatok – matematikai modell alkotása.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Másod- és harmadfokú, továbbá gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Az egész számok gyűrűje; a racionális és a valós számtest; csoportok, félcsoportok megismerése. A rendszerező képesség fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Egyenletek algebrai, grafikus megoldása. Azonos átalakítások gyakorlása. Ekvivalens és nem ekvivalens lépések az egyenletmegoldás során, ellenőrzés, hamis gyökök, gyökvesztés. Teljes négyzetté alakítás; a másodfokú egyenlet megoldóképlete; gyökök és együtthatók közti összefüggés (Viète-formulák); gyöktényező alak. Másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek megoldása; paraméteres és szöveges feladatok, reciprok-egyenlet. Szélsőérték-feladatok. Az n -edik gyök fogalma. Számolás gyökös kifejezésekkel; irracionális számok konstrukciója különböző módszerekkel. A komplex számok testének alaptulajdonságai, Moivre-tétel, gyökvonás komplex számokból; egységgyökök. Számolás komplex számokkal; komplex számok felhasználása geometriai feladatokban, összegek kiszámításában. A harmadfokú egyenlet megoldása. [A negyedfokú egyenlet.] Digitális technikák használata az egyenletmegoldás során. <i>Matematikatörténet:</i> Tartaglia, Cardano.		<i>Fizika:</i> kinematika, dinamika. <i>Kémia:</i> oldatok összetétele.
Polinomok a racionális, a valós számtest felett; fokszám; műveletek polinomokkal; együttható, főegyüttható, polinomok maradékos osztása, gyöktényezők, gyökszám kisebb vagy egyenlő, mint a fokszám; többszörös gyökök; gyökök és együtthatók közti összefüggés. Polinomok azonossága (a racionális, a valós, a komplex számok fölött). Oszthatóság polinomok körében; Horner-elrendezés. [Polinom és polinomfüggvény különbsége; interpoláció, elemi szimmetrikus polinomok, szimmetrikus polinomok.] A racionális, a valós és a komplex számtest feletti polinomok		<i>Informatika:</i> számítógépes program használata.

gyűrűje. [Az interpoláció alaptétele. Polinomok azonossága tetszőleges test fölött (pl. a mod p (p prím) maradékosztálytest felett $x^p - x$ nem azonosan 0, de az azonosan 0 polinomfüggvényt állítja elő.]		
Csoportok és félcsoportok konkrét példák. Geometriai alakzatok transzformációcsoportja; az egybevágósági transzformációk csoportja, felírása (pl. S_3 és a szabályos háromszög, S_4 és a szabályos tetraéder transzformációcsoportjának izomorfája; a négyzet, a téglalap transzformációcsoportja része a szabályos tetraéderének). [Jobb és bal oldali egységelem, zéruselem, additív, multiplikatív inverz; additív csoport multiplikatív félcsoport, csoport; nullosztó; izomorfia (konkrét példák); másodfokú testbővítések.] [A csoport, gyűrű, test (nem axiomatikus) fogalma; műveleti táblázatok.][A_3, A_4 geometriai jelentése.] Testek és gyűrűk egyszerű tulajdonságai. A valós számokon belül a legszűkebb résztest a racionális számok teste; ha $n > 0$ egész nem teljes k-adik hatvány, akkor $\sqrt[k]{n}$ irracionális. [A legszűkebb, az 1-et tartalmazó számgyűrű az egészek gyűrűje. Adott elemet (pl. $\sqrt{2}$-t vagy $\sqrt{3} + \sqrt{2}$-t tartalmazó legszűkebb gyűrű és test keresése.] [Az $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbf{Q}$ alakú számok számtestet alkotnak, az $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $a, b, c \in \mathbf{Q}$ alakú számok nem alkotnak gyűrűt sem; példák és ellenpéldák félcsoportokra, csoportokra és testekre; a maradékosztálygyűrűk algebrai vizsgálata.] [Test- és gyűrűtulajdonságok bizonyítása (pl. $-a = (-1)a$ a testben; egységelemes gyűrűben; rossz bizonyítások; 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 elemű testek létezése és egyértelműsége; 6 elemű test nincs).] <i>Matematikatörténet: algebra – Al-Hvarizmi.</i>		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Másod- és harmadfokú egyenlet, egyenlőtlenség, teljes négyzetté alakítás, megoldóképlet, diszkrimináns, diszkusszió. Egyenletrendszer. Gyökös egyenlet. Komplex szám, polinom. Csoport, gyűrű, test.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Lineáris algebra	Órakeret 15 óra
Előzetes tudás	Vektorok, koordináta-rendszer, valós számok teste.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A lineáris vektorterek megismerése. A függetlenség és összefüggőség fogalmának kialakítása, elmélyítése. Gauss eliminációs módszer elsajátítása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A lineáris vektortér (a valós számtest felett); lineáris kombináció. A lineáris függőség, függetlenség; altér; vektorok által meghatározott altér. Lineáris egyenlet és egyenletrendszer mint a megfelelő altér normálvektoros egyenlete; lineáris egyenletrendszer felírása mátrixalakban; a mátrix, mátrixok konstansszorosa, mátrixok		

összege, különbsége; négyzetes mátrix, a determináns és értéke. Területképlet és vegyes szorzat felírása determinánssal.	
Gauss-elimináció. Homogén lineáris egyenletrendszer, homogén lineáris rekurzió, homogén lineáris diofantikus egyenlet (és egyenletrendszer) megoldásai halmazának közös tulajdonsága. A lineáris függetlenség feltétele; egy vektor lineáris függése a többtől és lineárisan összefüggő vektorok közti kapcsolat. Lineáris tér alterének egyenlete (normálvektoros egyenletrendszerrel). Vegyes szorzat és lineáris függőség térben. Kollinearitás és az analitikus geometriai területképlet. Lineáris egyenletrendszer mint altér egyenlete. A normálvektorok lineáris függetlensége és összefüggése. Determináns sorvektorainak lineáris függetlensége és a determináns értéke közötti kapcsolat; a determináns sorainak és oszlopainak függetlensége közti kapcsolat. [Az $n \times n$-es lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele; annak lineáris algebrai jelentése. Egyszerű példák lineáris programozási feladatokra. A tárgyalt fogalmak, módszerek $n = 2$ és $n = 3$ esetben alkotják a törzsanyagot, az $n > 3$ esetek tárgyalása kiegészítő anyag.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektortér, mátrix, determináns, függetlenség, összefüggőség.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 65 óra
Előzetes tudás	Tételek, távolság, szög, illeszkedés. Háromszögek, négyszögek, sokszögek tulajdonságai. Szerkesztések. A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel ismerete. Transzformációk ismerete. Középponti és kerületi szögek tétele.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A geometriai szemlélet, látásmód fejlesztése. Transzformációk áttekintése. Szögfüggvények megismerése. Számítógép használata dinamikus szerkesztőprogramokkal.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A háromszög nevezetes pontjai, vonalai. Háromszög-egyenlőtlenség. A háromszögek szögeiről, oldalairól tanult tételek bizonyítása, alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban. A háromszög középvonala tulajdonságainak, ill. a kerületi szögek tételének bizonyítása tengelyes tükrözések összetevésével. Euler-vonal és Feuerbach-kör. [Háromszög izogonális pontja.] [A háromszög további nevezetes pontjai és vonalai: Brocard-pontok, antiparallelek, Lemoine-pont, Nagel-pont.]		Informatika: geometriai szerkesztő program használata.
Az egybevágósági transzformációk folytatása. Tengelyes tükrözések összetétele; irányított szakaszok és szögek. Az egybevágósági transzformáció mint távolságtartó transzformáció. Forgatás és eltolás mint kéttengelyes tükrözés összetétele. Héron-képlet. Érintőnégyzetek tétele („visszafelé” is).		

Az egybevágósági transzformációk összetétele; a sík [és a tér] egybevágóságainak osztályozása; összefoglalása. A sík minden egybevágósági transzformációja előáll három tengelyes tükrözés összetételeként [a tér minden egybevágósági transzformációja előáll négy síkra való tükrözés összetételeként; három tengelyes tükrözés összetétele csúsztatva tükrözés]. Az egybevágósági transzformációk csoportja. Alakzatok transzformációcsoportja. [Szabályos háromszög, négyzet, téglalap, szabályos tetraéder transzformációcsoportja; a sík egybevágósági transzformációinak csoportja.]		
A középpontos hasonlóság általános definíciója. Párhuzamos szelők tétele racionális arányra; a középpontos hasonlóság tulajdonságai. A trapéz tulajdonságai. Szögfelező-tétel a háromszögben; magasságtétel, befogótétel derékszögű háromszögben. Menelaosz és Ceva tétele. Hasonló sokszögek területének, hasonló testek térfogatának és felszínének aránya. Alakzatok egybevágósága és hasonlósága. [Pont körre, gömbre vonatkozó hatványa, hatványvonal.] A forgatványújtás. Aforgatványújtás tulajdonságai. [Ptolemaiosz tétele húrnégyszögekre és általában.] Inverzió [sztereografikus projekció].		
Trigonometriai alapismeretek A szögfüggvények vektorokkal. Szinusztétel. Koszinusztétel. A szögfüggvények addíciós tételei. Az ismert területképletek bizonyítása a terület általános fogalma alapján. Trigonometrikus területképletek. A trigonometria biztos ismerete. [Gömbi és síkgeometria összehasonlítása.]		
Kúpszeletek elemi tárgyalása. Ellipszis, hiperbola, parabola. [Tengelyes affinitás; tulajdonságai vektorokkal.]		
[Egyenlő oldalú és ortogonális tetraéder. Bennfoglaló paralelepipedon.] Tetraéder súlypontjának tulajdonságai [egyenlő oldalú tetraéder és ortogonális tetraéder tulajdonságai].		
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Transzformáció, hasonlóság, inverzió, szögfüggvény, kúpszelet.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Analitikus geometria	Órakeret 30 óra
Előzetes tudás	A derékszögű koordináta-rendszer. Vektorok „empirikusan”.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A koordinátagometria erejének megértése, képesség a koordinátagometria fogalmak használatára feladatok megoldásában, a szögfüggvények biztos ismerete és használata geometriai feladatokban, fizikai feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A vektor, egységvektorok; $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ mint az $\mathbf{i}$ vektor α szögű elforgatottjának koordinátái; $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ definíciója. Vektor skalárszorosának tulajdonságai.		<i>Fizika:</i> A skalárszorzat használata a definíciókban (munka,

Nevezetes szögek szögfüggvényei; összefüggés α és $90^\circ - \alpha$ szögfüggvényei között. Szakaszt $m : n$ arányban osztó pontba mutató vektor. Az egyenes paraméteres vektoregyenlete. Egyenes koordináta geometriai egyenletei: tengelymetszetes, iránytangenses, egyenlete síkban, térben. A kör egyenlete síkban, a gömb egyenlete térben. a és b akkor és csak akkor merőleges, ha a + b és a - b egyenlő hosszú; a és b csak akkor egyenlő hosszú, ha a + b merőleges a - b-re. Tetraéder középvonalainak merőlegessége, egyenlősége vektorokkal, egyenlő oldalú és ortogonális tetraéder tulajdonságai vektorokkal. Egyszerű számításos feladatok szögfüggvényekkel. Skálárszorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat alaptulajdonságai, kiszámolása a koordináta-rendszerben, alkalmazása feladatokban, bizonyításokban. A merőlegesség kifejezése skalárszorzattal. Az egyenes irányvektoros és normálvektoros egyenlete, normálegyenlete; pont és egyenes távolsága. A koordináta geometria alapfeladatai egyenessel és körrel, síkkal és gömbbel kapcsolatban. Addíciós tételek és következményeik. Ezek igazolása. Szögfüggvényes azonosságok. Koszínusztétel. Az egyenes egyenletrendszere térben. A kör érintőjének egyenlete. A háromszög koordináta geometriai (előjeles) területképlete.	stb.). Egyenes, kör egyenletének használata a mozgások leírásánál. Szögfüggvények alkalmazása a mechanikában, a hullámmozgásoknál stb.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Vektorok pontosabb definíciója, szögfüggvények definíciói. Alakzat egyenlete és egyenletrendszere. Egyenes, kör egyenlete. Skálárszorzat. Vektoriális szorzat. Vegyes szorzat.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények, szemléletes analízis	Órakeret 65 óra
Előzetes tudás	A függvény fogalma és az egyszerűbb elemi függvények. Ábrázolásuk a koordináta-rendszerben. Függvénytranszformációs tapasztalatok konkrét függvényeken.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Hatványozás és logaritmus azonosságainak használata feladatok megoldásában. A függvényvizsgálat fejlesztése. A végtelen sorozatokkal kapcsolatos szemléletmód kialakítása, az ilyen gondolkodásmód fejlesztése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Az $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ függvények, azonosságaik; a valós számokon értelmezett, valós értékű függvények. [Konkrét függvények esetén a különbségi hányados előjele és a monotonitás közti kapcsolat.] Az $x \rightarrow f(x)$ és az $x \rightarrow a \cdot f(bx + c) + d$ függvények grafikonjai közti		<i>Fizika:</i> elemi függvények tulajdonságainak felhasználása a rezgőmozgásban, a

kapcsolat konkrét példákon; a tapasztalatok összegzése. Az $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ definíciójában felhasználjuk, hogy az $x \rightarrow x^n$ értékészlete milyen; az $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ függvény monotonitása. Számtani és mértani sorozat; jellemzőik. A számtani és mértani sorozat n-edik tagjára és az első n tag összegére vonatkozó képletek. A számtani és mértani, a harmonikus és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség általános esetben (teljes indukció; a Riesz-féle bizonyítás). A periodikus tizedes törtek és a végtelen mértani sorok. A Fibonacci-sorozat n-edik tagjának explicit képlete; felezési eljárással megoldható feladatok; [példák korlátos és nem korlátos mértani sorokra; a „hópehelygörbe” területe véges, kerülete nem korlátos]. A $\sum \frac{1}{n}$ nem korlátos, a $\sum \frac{1}{n^2}$ korlátos. A hatványozás és a logaritmus azonosságai. A hatványozás fogalmának kiterjesztése a permanenciaelv segítségével. Az azonosságok biztos használata. A hatványozás és a logaritmus azonosságoknak, valamint a trigonometrikus azonosságoknak a felhasználása egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásában. Exponenciális, logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, paraméteres feladatok. [Példák fraktálokra; a Cantor-halmaz és tulajdonságai; konkrét függvények invertálása.] Például a $\text{ctg } x + \text{tg } x \geq 2$ egyenlőtlenség megoldása. Függvények vizsgálata elemi módszerekkel, alkalmazások. A konvexitás; a függvénygörbe „alatti” és „fölötti” tartomány. Gyenge (felezőpontbeli) konvexitás. A trigonometrikus függvények és inverzeik további tulajdonságai; gyenge konvexitásuk, konvexitásuk. Az exponenciális és a függvények vizsgálata. [Függvények konvexitásának jellemzése a különbségi hányados segítségével. Elemi függvények gyenge konvexitása. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség mint az exponenciális függvény konvexitásának következménye; hatványközepek és az x^a, $a \in \mathbf{R}$ függvény konvexitása.] A valós számok tulajdonságai. Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság szempontjából; konvergencia, végtelenbe divergálás szempontjából. Korlátos számhalmaznak van alsó és felső határa; monoton, korlátos sorozat konvergens; a konvergens sorozatok alaptulajdonságai; összeg, szorzat, hányados határértéke. Az e definíciója; az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat. Példák konvergens és divergens sorozatokra; rekurzióval definiált sorozatok konvergencia vizsgálata; az n^k, a^n, $n!$, n^n sorozatok összehasonlítása; [végtelen lánc törtek]. <i>Matematikatörténet:</i> Cantor és Dedekind.	mechanikában és az elektromosságban. <i>Informatika:</i> Függvények számítógépes ábrázolása. Rekurzió és számítógépes ciklus.
--	---

Kulcsfogalmak/ fogalmak	Monotonitás, szélsőérték, helyi szélsőérték, korlátosság, paritás. Periodicitás, monoton szakaszok, értékkészlet, konvexitás-konkávitás. Arkhimédészi-axióma és Cantor-axióma, Dedekind-szelet. Monoton sorozat; korlátos sorozat; konvergens sorozat; a végtelenbe divergáló sorozat. Racionális és valós kitevőjű hatvány, a permanenciaelv. Végtelen mértani sor.
------------------------------------	--

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Kombinatorika	Órakeret 45 óra
Előzetes tudás	Kombinatorikai alapeladatok. Permutáció, leszámolások.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A kombinatorikai gondolkodásmód kialakítása, alkalmazása a matematika különböző ágaiban. A diszkréttség kihasználásának módjai (teljes indukció, van legnagyobb, legkisebb, legszélső elem; „véges sok lépésben véget ér”). A szitaformula megértése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A kombinatorikai alapeladatok rendszerezése. Binomiális- és polinomiális-tétel bizonyítása (kombinatorikai és algebrai bizonyítás). A Pascal-háromszög tulajdonságai (kombinatorikai és algebrai bizonyítás). A szitaformula. A szitaformula alkalmazása kombinatorikai és számelméleti feladatokban, a $\varphi(n)$ függvény kiszámítása a szitaformulával. $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ egész megoldásai, ha a sorrend számít. Kombinatorikus megfontolások számelméleti és algebrai feladatokban. Kombinatorikus interpretációval igazolható azonosságok. Kombinatorikus geometriai feladatok (Erdős-Sylvester-tétel, egy síkban levő n pont által meghatározott háromszögeknek legalább 25%-a, 30%-a stb. derékszögű). Permutációk különböző felírási módjaival megoldható feladatok. Permutációcsoportok (testek egybevágóságai és gráfok automorfíája segítségével is). A kétszeres leszámolás módszere, kétszeres leszámolással igazolható azonosságok. Rekurzió és kombinatorika. [A Catalan-számok.] Állapotfüggvényes feladatok a kombinatorikában. Létezés bizonyítása az átlag segítségével.		<i>Informatika:</i> Permutációk felsorolása. Kombinatorikus gondolatok alkalmazása a számítógépes grafikában.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Pascal-háromszög. Binomiális és polinomiális tétel. Ismétléses kombináció, variáció. Permutációk szorzása. Permutációcsoport.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 35 óra
Előzetes tudás	Gráf fogalma, csúcs, élszám és fokszám, összefüggésük.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Az absztrakt gráfelméleti alapfogalmak (fa, összefüggőség, vágás, hídél, kromatikus szám) és tételek elsajátítása, alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Gráfokkal kapcsolatos egyszerű algoritmusok. (L. az algoritmusoknál is.) [Prüfer-kód.] A fa definíciójának ekvivalenciája, élszámára, szerkezetére, mini-max-tulajdonságára vonatkozó tételek. Fa élszáma. Az "úttal összekötve lenni" tranzitivitása. Összefüggő komponensekre bontás. Gráf vagy komplementere összefüggő. Az összefüggőség alkalmazása. Fa leghosszabb útjai, átmérője, középpontja(i) stb. [Összefüggés a fokszám és a magasság között.] Távolsággráf. Maximális fokszám $\geq$ kromatikus szám (mohó algoritmus). Turán-tétel. Erdős-Szekeres-tétel, egyéb egyszerűbb Ramsey-típusú tételek. [Menger-tétel 2-re.] A mohó algoritmus szuboptimális független él- és pontrendszerek keresésére. Körmérkőzések párosításai. Adott gráfban pontok közti legrövidebb, leghosszabb utak megkeresése algoritmussal. [4-reguláris gráfok 2-faktorokra bontása.] Hídél, vágáshalmazok keresése.		<i>Informatika:</i> Fák „ábrázolása”, hídél, úttervezés, közlekedéstervezés. Körmérkőzés-tervezés. <i>Kémia:</i> molekulaszervezetek gráfja. Szénhidrátok jellemzése.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Út, kör, összefüggőség, komponens, fa, erdő. Fa mint minimális összefüggő és maximális körmentes gráf. Számozatlan és számozott fa. Faváz. Irányított Euler-vonal. Páros gráf. Gráfok izomorfiája. Kromatikus szám. Független él- és pontrendszer. Hídél, vágás. Reguláris gráf.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 25 óra
Előzetes tudás	Konkrét kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája; kiválasztási és rendezési algoritmusok; mohó algoritmusok alkalmazhatósága és korlátai; állapotfüggvényes okoskodások (a fogalom még nem).	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Példák, amikor a mohó algoritmus ciklusba kerül, a mohó algoritmusszerű rossz bizonyítások felismerése. Keresési algoritmusok használata; méret figyelembevétele, csökkentése. Állapotfüggvény alkalmazása lépésszámba és elérhetőségre.	

	A descentinfinie, az állapotfüggvény és a teljes indukció közötti kapcsolat tudatosítása. A „vegyük a legnagyobbat, legszélsőt” elv alkalmazása. Kombinatorikus geometriai, számelméleti és kombinatorikai feladatok megoldása diszkrét állapotfüggvény csökkentésével.
Ismeretek/fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
A mohó algoritmus korlátainak és erejének megértése; algoritmus mérete, tervezése; [Buborék-algoritmus, quicksort], összefésülés, beszúrás stb. lépésszám és tárigény szerinti összehasonlítása. [Az euklideszi algoritmus és a prímfelbontással történő ln.k.o. meghatározás lépésszámának összehasonlítása.] Favázkeresés; szélességi és mélységi keresés. Bizonyítások algoritmizálása (pl. Reisz-féle bizonyítás $A \geq G$-re, intervallumpakolás). A feladat méretének végesítése konkrét példákon, pl. racionális gyökkeresésnél mint a feladat megoldásának garanciája (ennek jelentősége a számelméletben, kombinatorikában és általában diszkrét matematikában). Optimális [és szuboptimális] algoritmusok (pl. legnagyobb és legkisebb elem, n elemű halmaz rendezése, hátizsákfeladat, független érendszer keresése, fedési feladat). Állapotfüggvény megtalálása, alkalmazása lépésszám-optimum garantálására, algoritmus helyességének bizonyítására. „Oroszlánfogással” megoldható feladatok. Konkrét példák arra, hogy egy algoritmus vagy megadja egy feladat megoldását, vagy megmutatja a megoldhatatlanság okát (pl. gráf 2-színű színezésének szokott algoritmus, gráf feszítő fájának keresése, Euler-út keresése).	<i>Informatika:</i> keresési algoritmusok, mohó algoritmusok, ciklus, algoritmus végetérésének garantálása állapotfüggvénnyel, hatékony algoritmusok; szélességi és mélységi keresés az informatikában, a hozzájuk tartozó adatstruktúra.
Kulcsfogalmak/fogalmak	Mohó algoritmus. Favázkeresési módszer. Feladat mérete. Állapotfüggvény. Optimális és szuboptimális algoritmus. Oroszlánfogás.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 40 óra
Előzetes tudás	Kombinatorikus valószínűség egyszerű esetei; unió, komplementer valószínűsége; átlag, medián, módusz; egyszerű statisztikai adatok elemzése; táblázatok, grafikonok használata, gyakoriság, relatív gyakoriság. Százalékszámítás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség fogalmának megértése („nem tudásunk mértéke”); relatív gyakoriság és valószínűség, statisztika és modell különbsége; a modellalkotás folyamatának, szerepének megértése; a modellezés mint matematikai tevékenység; a valószínűségi eloszlás és a várható érték fogalmának, szerepének megértése; a szimmetriameggondolások helye, alkalmazhatósága, ennek határai; ismerkedés a valószínűségi meggondolások alkalmazásával, a játékelmélet alapjaival, ezek szerepének felismerése a mindennapokban és a tudományokban.	

Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A valószínűség fogalmának megértése mint „nem tudásunk mértéke” (példa: miért és hogyan változik annak valószínűsége, hogy a második kártya piros, ha az első felfordítom?). Modellezés egyszerűbb esetekben és általában. Gyakorlati példák arra, hogy mikor melyik mutatóval célszerű jellemezni a számsokaságot. Konkrét eloszlásokban annak igazolása, hogy valóban eloszlásról van szó. Szimmetrikus eloszlások. A binomiális és hipergeometrikus eloszlás; ezek várható értékének kiszámítása (egyszerűbb, majd általános paraméterek mellett, algebrai és valószínűségi megfontolások alapján). Mikor van, mikor nincs szimmetria: kombinatorikus és szimmetrián alapuló (pl. várhatóértékes) feladatok megoldása. A várható érték tulajdonságai; összeadódnak (bizonyítás fakultatív). A feltételes valószínűség fogalmának alkalmazása konkrét feladatokban. Játékelmélet: a 2 x 2-es játék elemzése.		<i>Biológia-egészségtan:</i> örökléstan. <i>Fizika:</i> statisztikai modellek. <i>Történelem, társadalmi és állampolgári ismeretek:</i> összefoglaló és részletes statisztikai adatok értékelése; játékelmélet. <i>Informatika:</i> táblázatkezelő, adatbázis-kezelő program használata.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Elemi esemény, klasszikus valószínűségi modell. Eseménytér. Diszkrét valószínűségi változó és eloszlás. Binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás. Legvalószínűbb érték. Statisztikai mintavétel: visszatevéssel és anélkül. Modell. Várható érték. Független esemény. Feltételes valószínűség. Legjobb stratégia a játékelméletben.	

A fejlesztés várt eredményei akét évfolyamos ciklus végén	<i>Halmazok</i> – A halmazműveletek és tulajdonságaik ismerete. – Halmazok számossága fogalmának helyes értelmezése. – Annak bizonyítása, hogy a racionális számok megszámlálható, a valós számok kontinuum számosságú halmazt alkotnak. – Végtelen halmazok ekvivalenciájának ismerete. – A részhalmazok, pontthalmazok, logikai szita fogalmainak biztosabb tudása <i>Logika</i> – Kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete. – Relációk, ekvivalenciarelációk, rendezési relációk ismerete. – A halmazműveletek és a logikai műveletek összefüggésének ismerete. <i>Számelmélet</i> – A legnagyobb közös osztó előállítása az euklideszi algoritmussal. – Lineáris kétismeretlenes diofantikus egyenletet megoldása. – Számolás maradékosztályokkal, kongruenciák ismerete.
--	--

	– A prímekre vonatkozó tételek ismerete. – Az Euler–Fermat- és a Wilson-tételek bizonyítása. – Számelméleti függvények ismerete: δ és φ függvény. – Rácsgeometriai problémák ismerete. <i>Aritmetika és algebra</i> – Másodfokú és arra visszavezethető egyenletek biztos megoldása. – Viète-formulák alkalmazása, paraméteres egyenletek, szélsőérték-feladatok, egyenlőtlenségek megoldása. – n-edik gyök fogalma, gyökös, irracionális egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. – Komplex számok ismerete. – Harmadfokú egyenlet megoldása. – Polinomok interpolációja, a Horner-elrendezés ismerete. – Ismerkedés a csoport, gyűrű, test fogalmával konkrét példákkal. <i>Lineáris algebra</i> – Homogén lineáris egyenletrendszer, Gauss-elimináció ismerete. – Determináns ismerete. – Mátrixok és műveleteik ismerete, mátrix inverzének kiszámítása. – Lineáris vektorterekkel való ismerkedés konkrét példákon keresztül. – Összefüggőség és függetlenség ismerete. <i>Geometria</i> – Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták ismerete, skaláris és vektoriális szorzás. – Kúpszeletek ismerete: ellipszis, hiperbola, parabola. – Forgásszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete. – Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása. – Az egybevágósági transzformációk, azok szorzatának biztos ismerete. – Hasonlóság ismerete. A szögfelező-, magasság- és befogó tételek bizonyítása. A Menelaos- és Ceva-tételek ismerete. Az Apollonius- kör ismerete. – A háromszög geometriájáról tanultak bővítése, további nevezetes pontok, Euler-vonal, Feuerbach-kör ismerete. <i>Analitikus geometria</i> – A koordináta-geometriai fogalmak használata feladatok megoldásában. – Az egyenes különféle egyenleteinek használata. – Körre vonatkozó feladatok megoldása. – Térbeli koordináta-geometria alapjainak ismerete (sík, egyenes, gömb egyenlete).
--	---

	– Szögfüggvények biztos ismerete és használata geometriai és fizikai feladatokban. <i>Függvények, szemléletes analízis</i> – Hatványozás és logaritmus azonosságainak ismerete, használata feladatok megoldásában. – A függvényekkel kapcsolatos fogalmak bővítése. – Gyökfüggvények, trigonometrikus függvények, exponenciális és logaritmikus függvények ismerete. – Képesség elemi függvények elemi vizsgálatára. – A végtelen sorozat fogalmának, tulajdonságainak megértése, változatos példák ismerete sorozatokra. <i>Kombinatorika</i> – A kombinatorikai alapeladatok rendszerezése. – Binomiális és polinomiális tétel ismerete és használata. – A szitaformula alkalmazása. – Kombinatorikus megfontolások alkalmazása számelméleti, algebrai és geometriai feladatokban. – Testek egybevághóságaiból, a gráfok automorfíájából kapott permutációcsoportok és az általános fogalom ismerete. – A kétszeres leszámolás módszerének alkalmazása. – A rekurzió fogalmának biztos ismerete és alkalmazása. <i>Gráfelmélet</i> – Ismerje és jól alkalmazza a gráfokkal kapcsolatos egyszerű algoritmusokat: a legrövidebb, leghosszabb utakat és a favázkereső algoritmusokat. – A fák fogalmának pontos ismerete és értése, alkalmazása az algoritmusoknál és a valószínűségi feladatoknál is. – A Ramsey-típusú tételek jelentőségének értése, a skatulyaelvvel való összefüggésének felismerése, az egyszerűbb ilyen tételek ismerete. <i>Algoritmusok</i> – A mohó algoritmus fogalmának, erejének és korlátainak értése, keresési algoritmusok ismerete. – Az adescenceinfinie, az állapotfüggvény és a teljes indukció közötti kapcsolatot értése. – A „vegyük a legnagyobb, legszélsőt” elvének alkalmazása feladatokban. – Az állapotfüggvény fogalmának, széles körű alkalmazhatóságának elsajátítása. <i>Valószínűség-számítás, statisztika</i> – A relatív gyakoriság és valószínűség, statisztika és modell különbségének értése. – A modellezés mint matematikai tevékenység ismerete. – A valószínűségi eloszlás és a várható érték fogalmának,
--	---

	szerepének megértése. – A szimmetriameggondolások helyének, alkalmazhatóságának és azok határainak ismerete. – A játékelmélet alapjainak, valamint a mindennapokban és a tudományokban játszott szerepének értéke.
--	---

11-12. évfolyam

A teljes óraszám 90%-ából fennmaradó 70 órát rendszerező összefoglalásra fordítjuk.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Halmazok	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	A halmazalgebra elemi fogalmai és műveletei. Számhalmazok és ponthalmazok. Példák számhalmazokra és ponthalmazokra. Halmazok ekvivalenciája. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok. A kontinuum számosság. A „tetszőlegesen sok” és a „végtelen sok” közti különbség.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Halmazelméleti szemléletmód fejlesztése. A fontosabb, mélyebb fogalmak ismerete, a matematika fejlődése szempontjából meghatározó ismeretek átadása; olyan példák, eljárások megismerése, amelyekkel sikerrel oldhatók meg a témakörbe tartozó feladatok.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Rendezett, jólrendezett és nem jólrendezett számhalmazok. A racionális számok halmaza nem jólrendezett. A racionális számok halmaza jólrendezhető (különböző típusú sorozatba rendezések). Példák különböző jólrendezett halmazokra. A számosságok körében a rendezés. Hatványhalmaz, a számosságok körében a kisebb fogalma. A számosságok körében értelmezett kisebb fogalom tulajdonságai; ekvivalenciatétel [bizonyítással]; Cantor-tétel; végtelen sok végtelen számosság van. <i>Matematikatörténet:</i> Kontinuumhipotézis. A Cantor-féle átlós módszer több konkrét alkalmazása [például az összes számítógépes algoritmusok halmaza megszámlálható, de nem rekurzív]; a Cantor-axióma alkalmazásával annak igazolása, hogy pl. a $[0;1]$ intervallum valós számai nem megszámlálhatók. <i>Matematikatörténet:</i> Georg Cantor munkássága. [Lexikografikus és antilexikografikus rendezés. Nyílt és zárt halmazok számossága. példák ω, ω^2, ω^ω típusú sorozatokra, a természetes számok véges sorozatainak lexikografikus, antilexikografikus rendezése.]		<i>Filozófia:</i> Zénón paradoxonai. A halmazelmélet fejlődésének hatása a modern filozófiára.

[Végtelen gráfok, végtelen fák, végtelen utak. Végtelen fák és gráfok alkalmazása konkrét feladatokban; példa olyan végtelen fára, amelyben van tetszőlegesen hosszú út, de nincs végtelen hosszú út; König-lemma: ha egy végtelen fában minden „emelet” véges, akkor van végtelen hosszú út; Ramsey-tétel végtelen gráfokra.] [A végtelen Ramsey-tétel alkalmazása, pl. tetszőleges sorozatnak van (végtelen) monoton részsorozata.] [Halmaz belső, külső és határpontja, nyílt és zárt halmaz, halmaz lezárása, környezet.] Különböző példák a síkon és a térben nyílt és zárt halmazokra. Halmazelméleti antinómiák [a halmazelmélet axiómarendszerei]. [Topologikus tér és altér, diszkrét topológia. Példák különböző egyszerű diszkrét topologikus terekre.]	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Hatványhalmaz, a számosságok körében a kisebb fogalma. Rendezett, jólrendezett és nem jólrendezett számhalmaz.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Logika	Órakeret 18 óra
Előzetes tudás	Állítások; kétváltozós logikai műveletek és tulajdonságaik; relációk, ekvivalenciarelációk, rendezési relációk. Boole-algebra. Normálformák és alkalmazásaik.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A formális logika elmeinek megismerése. A bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása. Az axiomatikus felépítés szükségességének, fontosságának megértése, egyszerűbb axiomatizálások végigkövetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>Bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása.</i> [Összefüggések a rekurzió, az algoritmus fogalmának különböző matematikai alakjai között. Az algoritmussal való megoldhatóság korlátai. Példák algoritmussal megoldhatatlan problémákra.] [Különböző példák algoritmizálható „létezés” bizonyításokra (gráfelméletben, kombinatorikában, számelméletben).] <i>Az axiomatikus módszer elemei.</i> [A Peano-axiómarendszer; a geometria egy axiómarendszere; a halmazelmélet. Zermelo–Fraenkel axiómarendszere.] A Bolyai-geometria egy modellje az euklideszi geometriában. [Az axiómák szerepének illusztrálására néhány egyszerű állítás levezetése a Peano-axiómákból, ill. a geometria axiómarendszerében.] Gödel nemteljességi tétele.		<i>Filozófia:</i> Formális logika. <i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> logikai áramkörök.

Matematikatörténet: Bourbaki.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Konstruktív és pusztán egzisztenciabizonyítás.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Számelmélet	Órakeret 27 óra
Előzetes tudás	Oszthatóság, kongruenciák, számelméleti függvények, diofantikus egyenletek megoldása, rácsgeometria elemei.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Problémamegoldás fejlesztése, az eddigi számelméleti ismeretek rendszerbe foglalása, a matematika néhány megoldatlan problémájának megismertetése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Elem rendje modulo m osztója $\varphi(m)$-nek. [Kvadratikus maradék, nemmaradék; lánc tört.] Kvadratikus kongruenciák megoldása prímmódulus esetén. A $4k + 1$ alakú prímekre az $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldható, a $4k - 1$ alakúakra nem. [Prímszámok számtani sorozatokban; kínai maradék tétel; Csebisev tétele; az n-nél kisebb prímek szorzatának becslése; lánc tört; Pell-egyenlet.] [Az n-nél kisebb prímek szorzatának becslése; Csebisev tétele; $\sum \frac{1}{p}$ divergens; Minkowski-tétel; Pell-egyenletek kapcsolata a lánc törttel.] A tanult tételek felhasználása változatos feladatokban; pl. végtelen sok $4k + 1$, $6k + 1$, $8k \pm 1$, $8k \pm 3$ alakú prím van. Diofantikus egyenletek megoldása becslések segítségével. Bizonyítás nélkül közölt érdekes eredmények a prímszámok eloszlásával kapcsolatban; sejtések, érdekességek. A felbonthatatlan és a prímtulajdonság kapcsolata. A számelmélet alaptétele [más gyűrűkben is]. A számelmélet alaptételének bizonyítása [elemzés; példák más gyűrűkre, ahol a bizonyítás valamelyik lépése nem megy]. [Euler-egészek.] Prím azonos a felbonthatatlannal az egészek gyűrűjében. [A titkosírás alapjául szolgáló tétel.] Titkosírás. Prímtesztek. Számelmélet a Gauss-egészek körében.] [Számolás Gauss-egészekkel, a Gauss-prímek jellemzése.] Példák a prímtulajdonság és a felbonthatatlan tulajdonság kapcsolatára.		<i>Fizika:</i> naptárak és lánc tört. <i>Informatika:</i> titkosítás, nagy prímek keresése.

Sok ismétlő példa, ezen keresztül valósul meg a fogalmak ismétlése is.	
<i>Matematikatörténet:</i> Diofantosz „Aritmetiká”-ja; Pierre Fermat munkássága; Euler és a Szentpétervári Akadémia; Gauss, a matematika fejedelme; A titkosírás története az Ókortól az RSA-ig.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Elem rendje mod m és primitív gyök. [Kvadratikus maradék, nemmaradék; lánc tört.] Felbonthatatlan; prím; [Gauss-egész, Gauss-prím; egység].

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algebra	Órakeret 36 óra
Előzetes tudás	Alapvető algebrai struktúrák megkülönböztetése; egész, racionális és komplex számok feletti polinomok, transzformáció-csoportok.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Algebrai struktúrák megkülönböztetése, műveletek általános vizsgálata, a geometriai szerkeszthetőség kérdéseinek általános megközelítése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
A permutációcsoportok. Csoportok, részcsoportok, gyűrűk, testek (axiómákkal). [Jobb és bal oldali egységelem, inverzelem azonosságára vonatkozó tételek], egy elem hatványai által alkotott részcsoport, [Lagrange-tétel]; S_n [és A_n] egyszerű tulajdonságai. [Test karakterisztikája; a legszűkebb p karakterisztikájú test; az elméletek axiomatikus felépítésének elemei. Véges nullosztómentes gyűrű test; gyökök és együtthatók közötti összefüggések tetszőleges test fölött, nullosztómentes gyűrűben; Csebisev-polinomok.] [Nemszerkeszthetőségi feladatok, pl. $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető euklideszi szerkesztéssel; 20° nem szerkeszthető.] További, változatos példák a tanult struktúrákra; [konkrét példában izomorfia igazolása és cáfolata]. [Az interpoláció felhasználása hatványok összegzésénél, kombinatorikában; példák gyűrű felett arra, hogy egy polinom fokszáma kisebb, mint a gyökök száma; a Csebisev-polinomok alkalmazása feladatokban.] <i>Matematikatörténeti érdekességek a nevezetes szerkeszthetőségi problémákról; eredmények (kockakettőzés, szögharmadolás, a szabályos 17-szög szerkesztése stb.).</i>		<i>Művészetek:</i> a szimmetria. <i>Fizika:</i> a váltóáram leírása komplex számokkal. <i>Fizika; technika, életvitel és gyakorlat:</i> a véges testek szerepe a CD-lemezen.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Algebrai struktúra. S_n . Részcsoport; elem rendje; csoport, részcsoport elemszáma; [mellékosztály; test karakterisztikája; szerkeszthetőség]. Izomorfia.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Lineáris algebra	Órakeret 23 óra
Előzetes tudás	A lineáris vektortér alapfogalmai és alkalmazásai; determinánsok; Gauss-elimináció.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Mátrixok használata, lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereinek, lineáris programozás elemeinek megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>Műveletek mátrixokkal, mátrix rangja. A lineáris programozás elemei.</i> [Lineáris vektortér és lineáris egyenletrendszer tetszőleges test felett.] Az inverz mátrix szerepe lineáris egyenletrendszer megoldásánál. Cramer-szabály. Mátrix rangjának meghatározása. [A lineáris programozás alapfeladatának átírása lineáris algebrai fogalmakkal; a lineáris programozás alaptétele.] [A lineáris egyenletrendszer megoldásakor csak azt használtuk fel, hogy az együtthatók egy testből valók; lineáris vektortér tetszőleges test felett definiálható.] [Az $n > 3$ esetekre a tárgyalt módszerek, tételek kiegészítő anyagot jelentenek.] Kombinatorikai, számelméleti példák a lineáris algebra alkalmazására. Mátrixok szorzásának gráfelméleti alkalmazásai. <i>Mátrixok és a lineáris algebrai alapismeretek összefoglalása.</i> A tanult módszerek, algoritmusok alkalmazása összetettebb feladatokban.		<i>Informatika:</i> tömbök használata, folyamatvezérlés. <i>Fizika:</i> Egyenletrendszerek áramkörök számításánál. A kvantummechanika sajátérték-problémája.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Mátrixok összeadása, kivonása, szorzása; négyzetes mátrix inverze; mátrix rangja. Lineáris programozás; konvex lineáris kombináció.	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Geometria	Órakeret 36 óra
Előzetes tudás	Az egybevágósági transzformációk, kerületi szögek, a trigonometria alapvető összefüggései.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Gondolkodási módszerek fejlesztése, ismerkedés az axiomatikus gondolkodással és építkezéssel, „új, más világok” megismerése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>A sík hasonlóságainak összefoglalása. A kör területe, az ellipszis területe. A kúpszeletek folytatása.</i> [A Bolyai-geometria elemei.] [A projektív geometria elemei.]		<i>Filozófia:</i> a didaktikus gondolkodás.

A sík hasonlósági transzformációinak jellemzése (egy egybevágósági transzformáció és egy forgatva nyújtás). Körbe írható maximális területű n-szög, kör köré írható minimális területű sokszög stb. A kör kerülete és területe, ellipszis területe (affinitással). [Az affinitás területaránytartó.] Dandelin-gömb; kúpszeletek főkörreire, vezérköreire és egyeneseire vonatkozó tételek, kúpszeletszerkesztések; körök (és egyenesek) közös érintőkörrei. [Vagy minden pontban Euklidesz axiómája igaz, vagy minden pontban Bolyai axiómája igaz. Az elválasztó tételek (pl. téglalap létezése, bármely három nem kollineáris ponton át húzható kör, van három kollineáris pont, amely egyenlő távol van egy egyenestől). Párhuzamossági szög, tetszőlegesen kisszögű szögtartományban van - mindkét szögszárral párhuzamos - egyenes.] [A párhuzamos vetítés affinitás, minden egyenesen osztóviszonytartó. A pontból való vetítés kettősvizonytartó. A projektív geometria alaptétele. Pascal tétele és Brianchon tétele.] A kúpszeletekkel kapcsolatos szerkesztési és bizonyítási feladatok. Az axiomatikus bizonyítási igény kialakításának kezdete, mi (lehet) axióma és mi tétel. Különböző geometriák belső összefüggéseinek és egymáshoz való viszonyának vizsgálata. (Ami az egyikben könnyű, a másikban nehéz, ami az egyikben van, az a másikban nincs.) További forgatványújtással megoldható szerkesztési és bizonyítási feladatok. Kúpszeletek szerkesztése; adott köröket, ill. egyeneseket érintő körök szerkesztése. [Egyszerű szerkesztési feladatok, amelyek pl. Bolyainál nehezekek.] [A Fagnano-feladat, a magasságpont létezése hegyesszögű háromszögben abszolút.] [Pascal-tétel, Brianchon-tétel alkalmazása bizonyítási és szerkesztési feladatokban. Axiomatikus bizonyítások. A háromszög nevezetes körei.] A korábbi területfogalmak egységesítése. Ismétlés. <i>A korábbi 5 év geometriaanyagának módszeres felépítése:</i> Egybevágósági transzformációk, osztályozásuk (síkban és térben), összetételük, háromszögek nevezetes pontjai, vonalai; Thalész-tétel; kerületi szögek tétele; az egybevágóság alapesetei; a derékszögű háromszögre vonatkozó tételek; nevezetes négyszögek (paralelogramma, trapéz, deltoid, húr- és érintőnégyszög tételei), sokszögek; vektorok, hasonlósági transzformációk osztályozása és összetétele; a hasonlóság alapesetei; terület, a korábbi területfogalmak egységesítése a határozott integrál segítségével; a kör geometriája, húr-, szelőtétel, Ptolemaiosz-tétel; Menelaosz- és Ceva-tétel; szerkesztések; [gömbi, hiperbolikus és projektív geometria elemei]. <i>Matematikatörténet:</i> A perspektíva és a festészet újjászületése a	<i>Fizika:</i> Kúpszeletek és égi mechanika. Az axiomatikus gondolkodás szerepe. Dirac és a projektív geometria. Konjugáltság és indefinitbilineáris formák, az általános relativitáselmélet tere. <i>Művészetek:</i> A perspektíva. M.S. Escher művészete. <i>Informatika:</i> a Geogebra szoftver használata.
---	--

reneszánsz korában. A híres francia geométerek; Bolyai János élete és eredményei; axiomatikus gondolkodásmód Bolyai előtt és után. [A sík geometriájától a komplex projektív geometriáig.]	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Affin transzformáció, hasonlósági transzformáció, illeszkedéstartó transzformáció. Konvex alakzat területe (beírt sokszögekkel), kerülete. Kúpszelet főköre, vezérköre és vezéregyenese. A kúp síkmetszetei. Axióma, a párhuzamossági axióma Euklidesznél és Bolyainál. Elválasztó tétel. Távolságvonal [és távolságfelület], paraciklus [és paraszféra]. Osztóviszony, kettősviszony. [A projektív sík (és a gömb), a dualitás elve. Harmonikus pontnégyes, négyszögpont.]

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Analitikus geometria	Órakeret 27 óra
Előzetes tudás	Az alapvető mértani helyekre vonatkozó tételek, trigonometriaival összefüggések, a másodfokú egyenlet megoldása, paraméteres egyenletek kezelése, az alapalakzatok egyenlete koordináta geometriában.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A konkrét fizikai tértől való elvonatkoztatás, a paramétertér, az alakzatok absztrakt terének megértése, kezelése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Apollóniosz-kör tétele. [Egyenes- és körsorok. A projektív geometria analitikusan.] <i>Kúpszeletek analitikus geometriája.</i> A kúpszeletek analitikus jellemzése. [Az elforgatott alakzatok jellemzése.] Analitikus geometria alkalmazása mértani helyek keresésénél és bizonyítási feladatoknál. Pontra és tengelyre való tükröképek egyenlete. Szögfelező egyenlete. A kúpszeletek tulajdonságainak analitikus bizonyítása. Szerkesztési feladatok megoldása analitikus geometriával. <i>Az analitikus geometriai ismeretek rendszerezése</i> Alakzat egyenlete, az egyenes, kör, kúpszelet különböző egyenletei. A gömb, a sík és a térbeli egyenes egyenlete. Analitikus geometria alkalmazása bizonyításokban és szerkesztésekben. Terület-, térfogatképlet (vegyes szorzat); egyenes és pont távolsága, egyszerű tükrözési feladatok kiszámítása. <i>Matematikatörténet:</i> Apollóniusz „Kóniká”-ja; Aszümptomáktól a homogén koordinátáig – Apollóniosz, Descartes, Plücker.		<i>Fizika:</i> Erővonalak és ekvipotenciális felületek, ortogonális trajektóriák. Vegyes szorzat az elektromágneses térben. A 3-nál több dimenzió kezelése. <i>Technika, életvitel és gyakorlat:</i> a 3D ábrázolás.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Apollóniosz-kör; [hatványvonal analitikus geometriával; egyenes- és körsor; homogén koordináta].	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Függvények, analízis, a topológia elemei	Órakeret 68 óra
Előzetes tudás	A másodfokú, reciprokok és gyökfüggvények ábrázolása, függvénytranszformációk kezelése, sorozat határértékének fogalma és alkalmazása feladatok megoldásában, mértani sorozat ismerete, koordinátageometriai alapismeretek, konvexitás geometriai feladatokban és a fent említett függvények esetén.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Egyváltozós függvények elemzése, teljes függvényvizsgálat, az analízis eszközeinek alkalmazása gyakorlati, ill. más tudományágakból származó feladatokban.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>Az $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága, differenciálhatósága; alkalmazások:</i> A ponthalmazok elméletének elemei. [Cauchy-féle konvergencia kritérium.] A függvényhatárérték (folytonosság) „sorozatos” és „környezetes” definícióinak ekvivalenciája. A folytonosság és a szakadási helyek. Folytonos függvények alaptulajdonságai [bizonyítással]. [Kétváltozós és komplex függvények folytonosságával, határértékével kapcsolatos alaptulajdonságok.] Differenciálási szabályok. Középérték tételek. Monotonitás, szélsőérték, helyi szélsőérték, konvexitás vizsgálata az első és második deriváltfüggvénnyel. Az elemi függvények folytonossága, differenciálhatósága; deriváltja; ezek felhasználásával tulajdonságaik. [Monoton függvénynek megszámlálhatóan sok szakadási helye van. Kétváltozós függvények, egyszerűbb komplex függvények folytonossága. Parciális derivált és geometriai jelentése.] [Taylor-formula.] Nyílt és különböző definícióinak ekvivalenciája; nyílt halmazok; zárt halmazok uniója, metszete. Sorozatok és függvények (véges és végtelen) határértékének meghatározása (az $(1 + \frac{x}{n})^n$ és $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$, $x_n \rightarrow 0$) típusú határértékek; az „$1^{\text{végtelen}}$”, „$\frac{0}{0}$”, „$0 \cdot \text{végtelen}$”, „$\frac{\text{végtelen}}{\text{végtelen}}$” típusú határértékek kiszámítása). Függvények folytonosságának megállapítása. A deriválási szabályok alkalmazása; teljes függvényvizsgálat; szélsőérték-feladatok, szöveges feladatok megoldása is (a megfelelő analízisbeli modell megtalálása). [Paraméteres, polárkoordinátákkal adott görbék vizsgálata.] <i>Végtelen sorok [abszolút és feltételesen konvergens sorok; az elemi függvények sorfejtése, Taylor-sorok]. Az inverz függvény differenciálása. Határozott és határozatlan integrál és alkalmazásai. [Példák differenciálegyenletekre és megoldásukra]:</i> Terület, térfogat, ívhossz, forgásfelület felszíne, súlypont, tehetetlenségi nyomaték. [Nullmértékű halmaz; sehol nem sűrű; mindenütt sűrű halmaz.]		<i>Fizika:</i> Pillanatnyi sebesség és derivált, munka és integrál, Newton és a differenciálegyenletek stb. Hatványsorok és közelítő képletek. <i>Biológia-egészségtan:</i> populációdinamikai modellek. <i>Informatika:</i> függvények ábrázolása számítógéppel (Geogebra v. Derive v. Maple).

A felosztás finomításával az alsó összeg nem csökken, a felső összeg nem nő; a határozott integrál létezésének szükséges feltételei; elégséges feltételei. Folytonos függvény integrálja mint a felső határ függvénye differenciálható. A Newton-Leibniz-formula. Az integrálszámítás középértéktétele. [Taylor-sor konvergenciájának feltétele; az elemi függvények sorbafejtése.] Az ívhossz létezésének elégséges feltétele; [paraméteres, polárkoordinátás alakban adott görbe által határolt tartomány területe; a görbe ívhossza]. [Megszámlálható sok nullmértékű halmaz egyesítése nullmértékű; nyílt halmaz felbontható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítésére.] A trigonometrikus függvények inverzeinek deriválása; az integrálás technikája (parciális integrálás; helyettesítéssel való integrálás; parciális törtekre bontás). [Szétválasztható változójú és lineáris elsőrendű differenciálegyenletek megoldása; $\frac{1}{1-x}$, $\sin x$, $\cos x$, e^x Taylor sora.] Példák az integrál geometriai, fizikai, kémiai és más alkalmazásaira. <i>Matematikatörténet:</i> Newton és Leibnitz, Európa tanítói: a Bernoulliak, küzdelem a precizitással: Cauchy és Abel.	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Konvergens síkbeli és térbeli pontsorozat; komplex számsorozat határértéke. Cauchy-féle konvergencia-kritérium. $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ típusú függvények határértéke, folytonossága; összeg, különbség, szorzat, hányados határértéke, folytonossága; közvetett függvény; jobb és bal oldali határérték; szakadási hely. A végtelenben vett határérték, a végtelen mint határérték. Az elemi függvények folytonossága. Zárt intervallumon folytonos függvény; Darboux-tulajdonság. „Patologikus függvény”. Függvény grafikonjának érintője; a differenciálhányados. Többször differenciálható függvény. Belső, külső és határpont, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz. Inverz függvény deriváltja. Felosztás, felosztássorozat, finomítás, alsó és felső összeg, közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Gráfelmélet	Órakeret 27 óra
Előzetes tudás	Euler-út és -kör létezésének feltétele, a fa fogalma, algoritmusok készítésének gyakorlata, algoritmus lépésszámának fogalma.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Tapasztalatszerzés konkrét gráfokkal és algoritmusok elemzése tetszőleges gráfra.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
Hamilton-kör. Síkbarajzolható gráfok. Utazó ügynök: Dirac tétele Hamilton-kör létezésére. Síkbarajzolható gráfok		Informatika: algoritmusok az

élszámának maximuma. Euler-féle poliédertétel. [Ötszintétel. Gömbre rajzolható gráfok.] Az utazó ügynök (minimális költségű faváz keresése az optimista és a lusta vállalkozó mohó algoritmusával). Az utazó ügynökével rokon, de mohó algoritmussal nem megoldható feladatok. Hamilton-kör keresése. Példák síkbarajzolható és nem síkbarajzolható gráfokra. [Alsó és felső becslés G és komplementerének kromatikus számának összegére.] <i>Páros gráfokra vonatkozó tételek és algoritmusok:</i> [König-tétel (teljes párosításra), Hall-tétel, Frobenius-tétel. König-tétel ekvivalensei: páros gráfban minimális lefogó pontrendszer és maximális független élrendszer keresése mint komplementer feladatok, ugyanígy minimális lefedő élrendszer és független maximális pontrendszer keresése. Hasonló komplementer-feladatok korábbról (Euler-kör, páros gráf színezése, összefüggőség, faváz keresése).] [Páros gráfokra, reguláris páros gráfokra vonatkozó feladatok. Reguláris páros gráfban van teljes párosítás, egyfaktorok uniója.] [Leszámolási feladatok: Erdős P. Ramsey-ellenpéldája.] [Menger-tétel.] <i>Matematikatörténet:</i> XX. századi magyar eredmények a gráfelméletben. A négyszín-tétel: az első számítógépes bizonyítás.	informatikában.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Páros gráf, párosítás, reguláris gráf, kromatikus szám, egyfaktor, Hamilton kör, síkbarajzolható gráf, utazó ügynök; teljes párosítás, reprezentáns rendszer; lefogó pontrendszer, lefedő élrendszer. König-feltétel.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Algoritmusok	Órakeret 36 óra
Előzetes tudás	A gráf fogalma, fagráf, esetek összeszámolása fagráffal, függvények növekedésének összehasonlítása (határérték-számítás).	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Új és korábbról ismert problémák algoritmikus megközelítése, algoritmusok írása, lépésszám becslése.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>Fák, gráfok tárolása. Gráfelméleti, kombinatorikai, számelméleti, algebrai algoritmusok elemzése:</i> [Az ismert szorzási algoritmusnál van gyorsabb szorzási algoritmus: Karacuba módszere.] [A König-tétel és a König-féle „alternáló utak” módszere.] További példák lépésszámbecslésekre: további (gráfelméleti, kombinatorikus geometriai) példák. Lineáris egyenletrendszer		<i>Fizika, kémia, biológia-egészségtan:</i> Lineáris egyenletrendszerek a természettudományokban. Közelítő algoritmikus módszerek a

megoldásának algoritmizálása, [a pontos megoldás ingadozásai, az algoritmusnak a gép végességéből adódó „hibái”]. [A kínai maradéktétel algoritmizálása. Minimális költségű faváz keresése mohó algoritlussal. A hozzá tartozó „erősebb győz” adatstruktúra, az algoritmus lépésszáma.] <i>Polinomiális, nem polinomiális algoritmusok. Az alapvető algoritmusok rendszerező ismételése:</i> [Példák univerzális kereső feladatokra, a kielégíthetőségi probléma.] Az alapműveletek elvégzésének szokásos algoritmusai polinomiális, az alapvető algoritmusok ismételése, elemzése. [Az euklideszi algoritmus polinomiális, a prímtényezőkre bontás lassú. Gyorsszorítás: ismertetés.] A megismert fontosabb algoritmusok vizsgálata: melyik polinomiális. <i>Matematikatörténet:</i> A Gödel-tétel hatása. Milléneumi problémák.		természettudományos előrejelzésekben. <i>Filozófia:</i> az algoritmizálhatóság korlátai, Gödel nem teljességi tétele.
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Fák tárolási módjai. Gráfok tárolási módjai. Szomszédsági mátrix, [körmátrix], [Prüfer-kód]. [„Az alternáló utak” algoritmusai páros gráfban.] Polinomiális és nem polinomiális algoritmus, algoritmizálhatóság. [NP-teljes probléma.]	

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	Valószínűség-számítás, statisztika	Órakeret 36 óra
Előzetes tudás	A várható érték és a feltételes valószínűség fogalma, a binomiális, hipergeometrikus és geometriai eloszlás.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	A valószínűség-számítás elvi alapjainak megértése; a szórás fogalmának gyakorlati alkalmazásai, a nagy számok törvényének megértése, alkalmazása.	
Ismeretek/fejlesztési követelmények		Kapcsolódási pontok
<i>A geometriai valószínűség. Bayes-tétel. [Markov-láncok.] Szórás:</i> Teljes valószínűség tétele; Bayes-tétel. [A Markov-láncokhoz tartozó lineáris egyenletrendszerek. A Markov-láncok valószínűségei és várható lépésszámai.] Az ismert eloszlások szórása. Feladatok megoldása a teljes valószínűség tételével és Bayes-tétellel (annak tisztázása, hogy miért nem lehet egyszerűbben). [Markov-láncok felírása (az állapotok jó választása) és a megfelelő valószínűségek kiszámítása.] Bolyongási feladatok megoldása. A várható érték felhasználása pozitív értékű valószínűségi változónál a valószínűség becslésére (a nagy számok törvényének előkészítése). Geometriai valószínűséggel megoldható feladatok. <i>A nagy számok törvénye; Markov-egyenlőtlenség. Ismétlés:</i> Markov-egyenlőtlenség. A nagy számok törvénye.		<i>Fizika:</i> Statisztikus fizika. A tehetetlenségi nyomaték és a szórás mint rokon fogalmak. <i>Biológia-egészségtan:</i> valószínűség-számítás. Monte-Carlo-módszer. Egységbebecslések.

Ismétlés: a valószínűség tulajdonságai mint az az érték, amelytől legkisebb a négyzetes eltérés, szórás; az egyszerű várható értékek és szórások. Valószínűség becslése a szórás segítségével. Szimmetria-megfontolások és kombinatorikus módszerek alkalmazása a valószínűség kiszámítására. Visszatevéses és visszatevés nélküli feladatok. (Ismétlés.) [Integrál felhasználása a valószínűség-számításban.] <i>Matematikatörténet: A földméréstől a mértékelméletig.</i>	
Kulcsfogalmak/ fogalmak	Geometriai valószínűség. Teljes eseményrendszer. Valószínűségi mező. Valószínűségi változó, várható érték, szórás. A nagy számok törvénye.

A fejlesztés várt eredményei a két évfolyamos ciklus végén	<i>Halmazok</i> – Számossággal kapcsolatos ismeretek áttekintése. – Halmazok rendezése. – Nyílt és zárt halmazok. – Kapcsolódó problémák ismerete, eljárások, módszerek önálló alkalmazása. <i>Logika</i> – Bizonyítások és konstrukciók algoritmizálása. – Az axiomatikus módszer elemeinek megismerése. – A Bolyai geometria modellezése. – A halmazelmélet axiómarendszerének ismerete. <i>Számelmélet</i> – Prím és felbonthatatlan szám kapcsolatának ismerete különféle gyűrűkben. – Különféle prímek számának ismerete. – Diofantikus egyenletek megoldása. – Nevezetes tételek, sejtések ismerete. <i>Algebra</i> – Csoportok, más algebrai struktúrák ismerete. – Permutációcsoportok ismerete. – Polinomok tetszőleges test felett ismerete. – A szerkeszthetőség általánosabb megközelítése. – Nevezetes problémák, eredmények megismerése. <i>Lineáris algebra</i> – Mátrixok használata. – Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereinek ismerete. – A lineáris programozás elemeinek ismerete. <i>Geometria</i>
--	---

	– A sík hasonlóságainak rendszerezése. – A terület pontos fogalmának kialakítása. – Kúpszeletek elemi felépítése. – A projektív geometriai fogalmainak, fontosabb alapvetéseinek megismerése. – A Bolyai-geometria elemei. <i>Analitikus geometria</i> – Kúpszeletek analitikus geometriájának megismerése. – Analitikus geometriai eszközök hatékony kezelése feladatok megoldásában. <i>Függvények, analízis, topológia elemei</i> – Egyváltozós függvények elemzése, teljes függvényvizsgálat. – Határozott és határozatlan integrál és alkalmazásai. – Az analízis eszközeinek alkalmazása gyakorlati, ill. más tudományágakból származó feladatokban. <i>Gráfelmélet</i> – Fontosabb gráfelméleti fogalmak, tételek biztonságos használata. – Páros gráfokra vonatkozó ismeretek megszerzése. – Gráfokra vonatkozó ismeretek rendszerezése. <i>Algoritmusok</i> – Új és korábbról ismert problémák algoritmikus megközelítése, algoritmusok írása, lépésszám becslése. <i>Valószínűség-számítás, statisztika</i> – A valószínűség-számítás elvi alapjainak megértése. – A szórás fogalmának gyakorlati alkalmazásai. – A nagy számok törvényének megértése, alkalmazása. A matematikai tanulmányok végére a tanulók tudjanak önállóan megoldani matematikai problémákat. Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat. Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni (pl. gazdasági, pénzügyi kérdésekben). Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet, elektronikus eszközöket. Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni. A feladatmegoldások során használják helyesen a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket. A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére. A helyes érvelésre szoktatással a tanulók rendelkezzenek megfelelő
--	--

	kommunikációs készséggel. Rendelkezzenek alapvető matematikai kultúrtörténeti ismeretekkel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire.
--	--